

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

Куйбышевский государственный университет

А.В.ГОРОХОВ

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ГРУПП В ЗАДАЧАХ
КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие к спецкурсам

Часть 3

Куйбышев 1983

ВВЕДЕНИЕ

Книга является третьей частью учебного пособия, части I и II которого под тем же названием были выпущены издательством КГУ в 1977 и 1979 годах. Поэтому сохранена непрерывная нумерация параграфов. Содержание третьей части тесно связано в идейном отношении с предыдущими выпусками, однако её можно читать и независимо от них.

Методами, основанными на использовании теории представлений алгебр и групп Ли и техники когерентных состояний, рассмотрены два типа задач:

– В § 10 групповые методы применены к описанию релаксации квантовых систем с эквидистантным спектром, таких, что операторы переходов между соседними уровнями входят в набор генераторов динамической группы невозмущенного гамильтониана.

– В § II обсуждена взаимосвязь между групповым подходом и интенсивно развиваемым в последнее время методом интегралов по траекториям. Исследовано построение фейнмановского пропагатора ряда модельных квантовых систем в представлении когерентных состояний на динамической группе гамильтониана.

Автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность А.А.Биркову, Я.И.Грановскому, М.А.Ковнеру, В.И.Манько, М.Б.Менскому, А.М.Перелому и Д.А.Шелепину за внимание к работе.

Большую помощь оказали автору студенты физического факультета В.А.Михайлов, О.П.Николаева, Е.А.Яковлева, которые решали некоторые задачи, вошедшие в книгу.

При работе над всей книгой автор пользовался постоянной поддержкой и ценными советами безвременного скончавшегося заведующего кафедрой общей и теоретической физики КГУ, профессора Алексея Даниловича Ершова.

Книга посвящается его светлой памяти.

§ 10. ГРУППОВЫЕ МЕТОДЫ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ РЕЛАКСАЦИИ

В данном параграфе групповые методы использованы для описания релаксации к состоянию термодинамического равновесия квантовых систем с эквидистантным спектром (гармонический осциллятор, спиновые системы, ансамбль двухуровневых молекул, сингулярный осциллятор).

Рассматриваемые эквидистантные системы имеют известные динамические группы, что позволяет ввести в каждом случае соответствующие обобщенные когерентные состояния. Если для матрицы плотности динамической подсистемы существует диагональное представление вида

$$\hat{\rho}(t) = \int d\mu(x) P(x, t) |x\rangle\langle x|,$$

где $|x\rangle$ — обобщенное когерентное состояние, $P(x, t)$ — контравариантный символ матрицы плотности, то операторное (квантовое) кинетическое уравнение для $\hat{\rho}(t)$ сводится к "классическому" уравнению Фоккера-Планка для функции $f(x, t) = \zeta(x) P(x, t)$ ($d\mu(x) = \zeta(x) dx$).

10а) Матрица плотности динамической подсистемы и уравнение Фоккера-Планка

Хорошо известно [1-4], что в общем случае состояние замкнутой квантовой системы описывается матрицей плотности $\hat{\rho}$, которая в картине Шредингера зависит от времени и подчиняется операторному уравнению Лиувилля ($\hbar = 1$)

$$i \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}], \quad (1)$$

\hat{H} — полный гамильтониан системы.

Формальное решение уравнения (1) имеет вид

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^{-1}(t, t_0), \quad (2)$$

Здесь $\hat{\rho}(t_0)$ — матрица плотности в начальный момент времени, которая определяется способом приготовления начального состояния, $\hat{U}(t, t_0)$ — оператор эволюции.

При этом зависимость от времени среднего значения некоторой физической величины \hat{B} определяется формулой

$$\langle B(t) \rangle = \text{Sp} \{ \hat{\rho}(t) \hat{B} \}. \quad (3)$$

Задача 86. Определить, каким условиям должна удовлетворять начальная матрица плотности $\hat{\rho}(t_0)$ замкнутой системы, чтобы $\hat{\rho}(t)$ являлась интегралом движения, т.е. не зависела от времени.

В реальных ситуациях, однако, необходимо рассматривать и незамкнутые квантовые системы, а более точно — рассматривать системы, взаимодействующие с окружением.

Согласно общим принципам квантовой статистической механики, система слабо взаимодействующая с термостатом, который поддерживается при фиксированной температуре T , в установившемся состоянии описывается матрицей плотности

$$\hat{\rho} = \exp[\beta(\mathcal{F} - \hat{H})], \quad \beta = \frac{1}{k_B T}, \quad (4)$$

$$\mathcal{F} = - (1/\beta) \ln \text{Sp} \exp(-\beta \hat{H})$$

— свободная энергия (предполагается, что квантовая система обменивается с термостатом только энергией).

Если в начальный момент времени система приготовлена в неравновесном состоянии, то с течением времени она будет совершать переход в равновесное состояние (состояние термодинамического равновесия). Процесс приближения системы к состоянию термодинамического равновесия называется релаксацией.

Процессы релаксации играют важную роль в квантовой радиофизике и нелинейной оптике [5,6], в теории лазеров [7] и т.д. Интересными примерами таких процессов являются релаксации ядерных спинов, взаимодействующих с магнитными примесями и решеткой в кристалле; спин-решеточная релаксация электронов проводимости в полупроводниках во внешнем магнитном поле; релаксация электромагнитного поля из-за взаимодействия стенок резонатора; спонтанное излучение атома в свободном пространстве (см., например, [5, 7-9]). Во всех этих примерах релаксация происходит в результате взаимодействия с системами, которые обладают очень большим (в пределе бесконечным) числом степеней свободы.

В дальнейшем будем придерживаться следующей терминологии [2,5]:

Динамической подсистемой будем называть ту часть замкнутой квантовой системы, которая имеет конечное число степеней свободы, дискретные уровни энергии и (без учета взаимодействия с окружением) описывается простыми динамическими уравнениями.

Диссипативной подсистемой будем называть окружение динамической подсистемы.

Диссипативная подсистема обладает (в пределе) бесконечным числом степеней свободы и непрерывным спектром.

В задаче о спонтанном излучении атома динамической подсистемой является атом, а диссипативной подсистемой — поле излучения в свободном пространстве.

Итак, рассмотрим взаимодействие динамической и диссипативной подсистем, которое определяется полным гамильтонианом

$$\hat{H} = \hat{H}_a + \hat{H}_t + \hat{H}_{int}, \quad (5)$$

где \hat{H}_a — гамильтониан динамической подсистемы, \hat{H}_t — гамильтониан диссипативной подсистемы (термостата), \hat{H}_{int} — оператор взаимодействия.

Будем интересоваться поведением динамической подсистемы. Если \hat{F}_a — некоторый оператор, зависящий от переменных этой подсистемы, то основной задачей является вычисление средних $\langle F_a(t) \rangle$. Согласно (3) такие средние даются выражением

$$\begin{aligned} \langle F_a(t) \rangle &= Sp \{ \hat{\rho}_{at}(t) \hat{F}_a \} = \\ &= Sp_a \{ Sp_t [\hat{\rho}_{at}(t) \hat{F}_a] \} = Sp_a \{ \hat{\rho}_a(t) \hat{F}_a \}, \end{aligned} \quad (6)$$

где Sp_a и Sp_t — обозначения операции взятия следа по переменным динамической и диссипативной подсистем соответственно; $\hat{\rho}_{at}$ — матрица плотности полной системы, удовлетворяющая уравнению (1) с гамильтонианом (5); $\hat{\rho}_a = Sp_t \hat{\rho}_{at}$ — имеет смысл матрицы плотности динамической подсистемы.

Как видно из (6) необходимо найти уравнение, определяющее поведение во времени $\hat{\rho}_a(t)$. Ясно, что в общем случае поведение $\hat{\rho}_a(t)$ зависит от состояния диссипативной подсистемы, но так как она очень велика и её взаимодействие с динамической подсистемой мало, то можно не учитывать влияние динамической подсистемы на термостат и считать, что термостат всё время находится в одном состоянии, заданным макроскопическими параметрами (например, температурой) и что средние, относящиеся к термостату, не зависят от времени.

Следовательно, если до включения взаимодействия ($t=0$) полная матрица плотности задана в виде

$$\hat{\rho}_{at}(0) = \hat{\rho}_a(0) \cdot \hat{\rho}_t(0), \quad (7)$$

то и после включения взаимодействия
поэтому

$$\hat{\rho}_t(t) = \hat{\rho}_t(0) \quad (t > 0),$$

$$\hat{\rho}_{at}(t) = \hat{\rho}_a(t) \hat{\rho}_t(0). \quad (8)$$

Это приближение называют [2] основным приближением необратимости.

В рамках этого приближения может быть выведено так называемое кинетическое уравнение для матрицы плотности $\hat{\rho}_a(t)$.

В это уравнение наряду с операторами, относящимися к динамической подсистеме, входят средние значения операторов, характеризующих состояние термостата.

Важный вклад в развитие метода кинетических уравнений в теории необратимых процессов был сделан в работах Н.Н.Боголюбова [10].

Подробное изложение метода получения кинетического уравнения проведено в книге [5] (см., также [8]).

Если динамическая подсистема имеет неэквидистантные уровни, то в представлении взаимодействия уравнение для матрицы плотности

$$\hat{\rho}(t) \equiv \hat{\rho}_a(t) \quad \text{имеет вид [5, II]}$$

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{nn} = \sum_m (\omega_{nm} \rho_{mm} - \omega_{mn} \rho_{nn}), \\ \dot{\rho}_{nm} = -\frac{1}{2} (\Gamma_n + \Gamma_m + \Gamma'_{nm}) \rho_{nm}, \quad m \neq n, \end{cases} \quad (9)$$

где ω_{nm} — вероятность перехода с уровня m на уровень n , $\Gamma_n = \sum_m \omega_{nm}$ — полная ширина уровня n , Γ'_{nm} — дополнительное уширение, которое связано с поперечной релаксацией.

Диагональные матричные элементы $\rho_{nn}(t)$ пропорциональны населенности n -го уровня и первое уравнение в (9) представляет собой уравнение баланса населенностей уровней. Недиагональные элементы $\rho_{nm}(t)$ релаксируют независимо друг от друга.

В работах [6, 10-12] (см., также [2], глава XIII) было выяснено, что релаксация в системах с эквидистантным спектром имеет ряд специфических особенностей. Уравнение баланса населенностей сохраняет свой вид, а уравнение для недиагональных элементов $\rho_{nm}(t)$ значительно усложняется: возникает перемешивание матричных элементов ρ_{nm} с фиксированным значением разности энергий $E_n - E_m$.

Оператор взаимодействия эквидистантной системы с термостатом имеет вид

$$\hat{H}_{int} = \sum_j \left\{ f_j \hat{A}_+ \hat{b}_j e^{i(\omega_0 - \omega_j)t} + \bar{f}_j \hat{A}_- \hat{b}_j^+ e^{-i(\omega_0 - \omega_j)t} \right\}, \quad (10)$$

где f_j - константы взаимодействия, \hat{A}_+ , \hat{A}_- - лестничные операторы, относящиеся к рассматриваемой динамической подсистеме (т.е. $[\hat{H}_a, \hat{A}_\pm] = \pm \hbar \omega_0 \hat{A}_\pm$ (см., например, часть I, §§ 3, 4)), $\hbar \omega_0$ - разность между соседними уровнями энергии, \hat{b}_j , \hat{b}_j^+ - бозонные операторы, соответствующие j -моду возбуждений в термостате. Термостат можно задать набором осцилляторов, т.к. системы, состоящие из очень большого числа частиц, очень часто обладают модами коллективных возбуждений, ведущих себя подобно осцилляторам. Тем самым, гамильтониан (10) описывает широкий круг процессов релаксации, связанных с коллективными возбуждениями в термостате.

В гамильтониане (10) оставлены лишь резонансные члены, которые не исчезают при усреднении по периоду (приближение "вращающейся волны").

В [2, 6, 10-12] показано, что матрица плотности эквидистантной динамической подсистемы, слабо взаимодействующей с термостатом подчиняется уравнению

$$\frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = -i [\hat{V}, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2} \left\{ \langle \nu \rangle + 1 \right\} [2 \hat{A}_- \hat{\rho} \hat{A}_+ - \hat{A}_+ \hat{A}_- \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{A}_+ \hat{A}_-] + \langle \nu \rangle [2 \hat{A}_+ \hat{\rho} \hat{A}_- - \hat{A}_- \hat{A}_+ \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{A}_- \hat{A}_+], \quad (11)$$

где $\gamma = 2\pi |f_j|^2 g(\omega_j) |_{\omega_j = \omega_0}$ - константа, определяющая затухание в динамической подсистеме, $g(\omega_j)$ - плотность состояний в термостате,

$$\langle \nu \rangle = \left[\exp\left(\frac{\hbar \omega_0}{k_B T}\right) - 1 \right]^{-1},$$

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \left\{ \delta' (\hat{A}_- \hat{A}_+ + \hat{A}_+ \hat{A}_-) + \delta'' [\hat{A}_-, \hat{A}_+] \right\}$$

- оператор перенормировки исходного гамильтониана \hat{H}_a , приводящий к Лэмбовскому сдвигу уровней,

$$\delta' = \int \frac{|f(\omega)|^2 g(\omega)}{\omega_0 - \omega} d\omega, \quad \delta'' = \int \frac{|f(\omega)|^2 g(\omega)}{\omega_0 - \omega} d\hbar \frac{\hbar \omega}{2k_B T} d\omega.$$

Слагаемые с оператором \hat{V} не представляют интереса при изучении процессов релаксации и в дальнейшем обычно не будут учитываться.

Задача 87. - Получить кинетическое уравнение (II), перейдя в уравнении (I) к представлению взаимодействия

$$i \frac{\partial \hat{\rho}_{at}}{\partial t} = [\hat{H}_{int}(t), \hat{\rho}_{at}] \quad (Ia)$$

и используя приближение необратимости (8).

Указание: Записать (Ia) в виде

$$\hat{\rho}_{at}(t) = \hat{\rho}_{at}(t_0) - i \int_{t_0}^t [\hat{H}_{int}(t'), \hat{\rho}_{at}(t')] dt'$$

и искать решение методом итераций, что для малых приращений Δt ($t = t_0 + \Delta t$) дает

$$\frac{\partial \hat{\rho}_{at}(t_0 + \Delta t)}{\partial t} = -i [\hat{H}_{int}(t_0 + \Delta t), \hat{\rho}_{at}(t_0)] + \\ + (-i)^2 \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} [\hat{H}_{int}(t_0 + \Delta t), [\hat{H}_{int}(t'), \hat{\rho}_{at}(t_0)]] dt' + \dots$$

(см., например, [2], гл. XIII).

Кинетическое уравнение (II) использовалось в [6] в теории двухфотонных процессов; в работах [II, 12] Б.Я. Зельдовичем, А.М. Переломовым и В.С. Поповым с использованием уравнения (II) изучена релаксация гармонического осциллятора с одноквантовыми переходами и ансамбля двухуровневых атомов. При этом получен ряд точных решений для матрицы плотности и, в частности, найдено точное квантовое выражение для контура линии излучения этих эквидистантных систем.

Уравнения, аналогичные (II), применялись также в квантовой теории лазера (изложение этих приложений можно найти в [7, 14, 15]).

Наиболее интересным для нас в дальнейшем является тот случай, когда операторы \hat{A}_- и \hat{A}_+ в уравнении (II) совместно с гамильтонианом \hat{H}_a входят в набор генераторов конечнопараметрической алгебры группы динамической симметрии G невозмущенной эквидистантной системы. Это позволяет использовать при исследовании релаксирующей динамической подсистемы мощные групповые методы [16-21, 13].

В частности, во множестве квантовомеханических состояний невозмущенной подсистемы можно ввести когерентные состояния

$$|x\rangle = \hat{T}(g_x) |\psi_0\rangle \quad (12)$$

Здесь x - точка однородного пространства динамической группы G :
 $x \in X = G_0 \backslash G$, G_0 - стационарная подгруппа исходного вектора $|\psi_0\rangle$,
 $\hat{T}(g_x)$ - унитарный оператор представления динамической группы,
 $g_x \in G$ - представитель правого класса смежности подгруппы G_0 в группе G ([13], см., также §3 часть I).

Если задана система когерентных состояний $|x\rangle$, то каждому оператору \hat{B} , действующему в гильбертовом пространстве состояний динамической подсистемы можно сопоставить функции на однородном пространстве $G_0 \backslash G$ [13, 22, 23]: ковариантный символ

$$Q_B(x) = \langle x | \hat{B} | x \rangle \quad (13)$$

и контравариантный символ $P_B(x)$, определяемый следующей формулой

$$\hat{B} = \int_X d\mu(x) P_B(x) |x\rangle \langle x|, \quad (14)$$

где $d\mu(x \cdot g) = d\mu(x)$ - инвариантная мера на однородном пространстве X .

Символы $Q_B(x)$ и $P_B(x)$ связаны соотношением

$$Q_B(x) = \int_X d\mu(x') P_B(x') |\langle x | x' \rangle|^2. \quad (15)$$

Если ковариантный символ $Q_B(x)$ можно определить всегда, то контравариантный символ $P_B(x)$ определен не во всех случаях. В самом деле, из (15) видно, что функция $Q_B(x)$ получается из $P_B(x)$ усреднением по однородному пространству X со сглаживающим ядром $|\langle x | x' \rangle|^2$ (например, в случае гауссовых когерентных состояний $|\langle x | x' \rangle|^2 = \exp(-|x - x'|^2)$). Поэтому из существования $P_B(x)$ следует существование $Q_B(x)$, обратное неверно.

Однако, если группа G компактна, то все её унитарные неприводимые представления конечномерны и для любого оператора

действующего в пространстве представления определены обе функции $Q_B(x)$ и $P_B(x)$, т.е. любой оператор \hat{B} имеет "диагональную форму" (I5) [22,23].

В случае глауберовских когерентных состояний $|\alpha\rangle = \exp(\alpha \hat{a}^+ - \bar{\alpha} \hat{a}) |0\rangle$, $\hat{a}|0\rangle = 0$, $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$, Q - и P - символы связаны с так называемыми нормально и антинормально упорядоченными формами записи оператора [I3].

Нормально упорядоченной (виковской) формой записи оператора $\hat{F} = \tilde{F}(\hat{a}^+, \hat{a})$ называется его представление в виде ряда

$$\hat{F} = \sum_{m,n} F_{mn} (\hat{a}^+)^m \hat{a}^n, \quad (I6)$$

т.е. все операторы $(\hat{a}^+)^m$ стоят слева от операторов \hat{a}^n , F_{mn} - числовые коэффициенты.

В этом случае

$$Q_F(\alpha, \bar{\alpha}) = \langle \alpha | \hat{F} | \alpha \rangle = \sum_{m,n} F_{mn} \bar{\alpha}^m \alpha^n. \quad (I7)$$

Антинормально упорядоченной (антивиковой) форме записи оператора

$$\hat{F} = \sum_{m,n} \tilde{F}_{mn} \hat{a}^m (\hat{a}^+)^n \quad (I8)$$

соответствует P - представление, в котором

$$P_F(\alpha, \bar{\alpha}) = \sum_{m,n} \tilde{F}_{mn} \alpha^m \bar{\alpha}^n. \quad (I9)$$

Последнее соотношение легко получить, вставив между соседними операторами \hat{a}^m и $(\hat{a}^+)^n$ единичный оператор $\hat{I} = \int \frac{d\alpha \wedge d\bar{\alpha}}{2\pi i} |\alpha\rangle \langle \alpha|$.

Из формул (I3), (I4) получаются соотношения для следа оператора \hat{F} ($|\alpha\rangle \equiv |\alpha\rangle$).

$$\text{Sp } \hat{F} = \oint_C Q_F(\alpha, \bar{\alpha}) \frac{d\alpha \wedge d\bar{\alpha}}{2\pi i} = \oint_C P_F(\alpha, \bar{\alpha}) \frac{d\alpha \wedge d\bar{\alpha}}{2\pi i}. \quad (20)$$

Задача 88. Вычислить Q - и P - символы оператора $\hat{D}(\beta) = \exp(\beta \hat{a}^+ - \bar{\beta} \hat{a})$ и проверить, что [I3]

$$S_P[\hat{D}(\alpha)\hat{D}^{-1}(\beta)] = \pi \delta^{(2)}(\alpha - \beta), \quad (21)$$

$$\hat{F} = \int \frac{d\beta \wedge d\bar{\beta}}{2\pi i} S_P[\hat{D}(\beta)\hat{F}]\hat{D}^{-1}(\beta). \quad (22)$$

Итак, для группы Гайзенберга-Вейля W_N задача о нахождении Q - и P - символов оператора свелась к отысканию его нормально и антинормально упорядоченной форм соответственно (при этом, обобщение на многомерный случай тривиально).

К сожалению, для других групп Ли не известен простой рецепт получения контрвариантных P -символов.

В случае группы $SU(2)$ разработан метод нахождения P -символов, использующих их разложение на сфере (однородном пространстве группы $SU(2)$) в виде ряда по сферическим функциям и технику коэффициентов Клебша-Гордона [13,24]. (См., далее § 10е).

Важным достоинством P - представления (14) является то, что его можно использовать для описания матрицы плотности $\hat{\rho}$ квантовой системы, взаимодействующей с термостатом, что позволяет свести операторное уравнение (II) к C - числовой форме (см. [7,13,16-21]). Будем предполагать, что рассматривается такой класс смешанных состояний динамической подсистемы (без учета взаимодействия с термостатом, имеющей линейную динамическую группу), что для матрицы плотности справедливо P - представление вида (14)

$$\hat{\rho}(t) = \int_X d\mu(x) P(x,t) |x\rangle\langle x|. \quad (23)$$

Тогда после подстановки соотношения (23) в (II) для функции $f(x,t) = \langle \epsilon(x) P(x,t) \rangle$ (где $\epsilon(x) = d\mu(x)/dx$, $dx \equiv dx_1 \dots dx_n$, - евклидова мера на однородном пространстве X) возникает уравнение типа Фоккера-Планка.

Вывод соответствующих C - числовых уравнений будет проведен ниже, а сейчас кратко изложим основные методы решений уравнений Фоккера-Планка.

Уравнение Фоккера-Планка уже давно нашло широкое применение в задачах неравновесной статистической физики. Наиболее известными при-

мерами процессов, описываемых такими уравнениями, являются броуновское движение частицы, диффузия медленных нейтронов, кинетика плазмы вблизи состояния равновесия, лазерная генерация и т.д. Кроме того, уравнения Фоккера-Планка возникают в общей теории марковских процессов.

Уравнение Фоккера-Планка имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_e} (A_e f) + \frac{\partial}{\partial x_e} \left(B_{ek} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right), \quad B_{ek} = B_{ke}. \quad (24)$$

Коэффициенты A_e и B_{ek} в общем случае зависят от переменных (x_1, \dots, x_n) .

Функция $f(x, t)$, подчиняющаяся уравнению (24) имеет смысл плотности распределения (квази)вероятности, поэтому для неё справедливо нормировочное соотношение

$$\int f(x_1, \dots, x_n, t) dx_1 \dots dx_n = 1. \quad (25)$$

В случае уравнений Фоккера-Планка, связанных с кинетическими уравнениями для матрицы плотности $\hat{\rho}(t)$, (25) есть следствие нормировки матрицы плотности: $S_P \hat{\rho}(t) = 1$.

Если начальное состояние системы описывается функцией $f_0(x, t_0)$, тогда

$$f(x, t) = \int d^n x' \mathcal{K}(x, t | x', t_0) f_0(x', t_0), \quad (26)$$

где $\mathcal{K}(x, t | x', t_0)$ - пропагатор (временная функция Грина) уравнения (24), т.е. решение удовлетворяющее (24) с сингулярным начальным условием $f_0(x, t_0) = \delta^{(n)}(x - x')$. Здесь $\delta^{(n)}(x - x')$ - n-мерная δ -функция.

Формула (26) есть следствие того факта, что (24) является уравнением параболического типа [25].

Следовательно, в значительной мере построение решений уравнения (24) сводится к отысканию пропагатора $\mathcal{K}(x, t | x', t_0)$, при этом решение (26) описывает процесс установления равновесного состояния для всех времен $t \geq t_0$.

Запишем уравнение (24) в виде

$$\partial f / \partial t = \hat{L}_x f, \quad (24a)$$

Здесь \hat{L}_x - дифференциальный оператор, явно не зависящий от времени. Если для \hat{L}_x известен набор собственных функций $\varphi_n(x)$, т.е. решена задача на собственные значения

$$\hat{L}_x \varphi_n(x) = \lambda_n \varphi_n(x), \quad (27)$$

то, как хорошо известно, пропагатор $\mathcal{K}(x, t | x', t_0)$ имеет вид разложения

$$\mathcal{K}(x, t | x', t_0) = \sum_n \varphi_n(x) \bar{\varphi}_n(x') e^{\lambda_n(t-t_0)} \quad (28)$$

Альтернативный метод нахождения решений (24) состоит в использовании стационарной функции Грина оператора \hat{L}_x , удовлетворяющей соотношению

$$\hat{L}_x G(x, x') = \delta^{(n)}(x - x'), \quad G(x, x') = \sum_n \varphi_n(x) \bar{\varphi}_n(x') / \lambda_n$$

и являющейся ядром оператора \hat{L}_x^{-1} , обратного оператору \hat{L}_x .

Представим (24а) в следующем виде [26]:

$$f(x, t) = f_0(x, t) + \hat{L}_x^{-1} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (29)$$

где $\hat{L}_x f_0(x, t) = 0$.

Уравнение (29) является интегральным, т.е.

$$f(x, t) = f_0(x, t) + \int G(x, x') \frac{\partial f(x', t)}{\partial t} d^n x'. \quad (29a)$$

Решая последнее уравнение итерациями, получаем ряд

$$f(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(x) \frac{d^k f_0}{dt^k}, \quad (30)$$

где $\beta_k(x)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\beta_k(x) = \int G(x, x') \beta_{k-1}(x') d^n x'. \quad (31)$$

Здесь кинетическая задача свелась к нахождению функции Грина оператора \hat{L}_x и вычислению интегралов типа (31).

На практике чаще всего интересуются состояниями системы при "достаточно больших" временах t , т.е. состояниями, близкими к равновесному.

В работах Л.А.Шелепина и соотр. [26,27] (см.также [7],гл.8) для решения уравнений типа Фоккера-Планка разработан метод т.н. квази-равновесных функций распределения.

В данном методе решение уравнения Фоккера-Планка представляется в виде ряда по степеням некоторого эволюционного оператора \hat{E}

$$f(x,t) = f_0 + \hat{E}f_0 + \dots + (\hat{E})^N f_0 + \dots \quad (32)$$

Функция распределения, содержащая N - слагаемых в (32) была названа квазистационарной функцией распределения (КФР) N -го порядка.

Физический смысл ряда (32) - разложение по степеням "медленности" процесса и степени приближения к состоянию равновесия. КФР, учитывающая в (32) конечное число слагаемых, правильно описывает поведение процесса во времени, лишь, начиная с некоторого момента времени, который определяется из условия пренебрежения слагаемыми более высокого порядка. Представление решения задачи по степеням "медленности" основано на общем свойстве любого марковского процесса - забывать информацию о начальном состоянии.

В работах [26,27] было показано, что наиболее интересную стадию процесса описывает КФР первого порядка.

Кратко изложим метод КФР [7,26,27].

Поделив на левую и правую части уравнения (24а) оператором \hat{L}_x^{-1} и приведем его к виду

$$f = f_0 + \hat{L}_x^{-1} \frac{\partial f}{\partial t} = f_0 + \hat{E} f \quad (33)$$

Решая это уравнение методом итераций, получим

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} (\hat{E})^k f_0, \quad (34)$$

тем самым, задача свелась к вопросу построения оператора, обратного оператору \hat{L}_x .

Исходное уравнение Фоккера-Планка (24) можно записать в дивергентном виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial I_j}{\partial x_j} = 0, \quad (35)$$

где $\vec{I} = (I_1, \dots, I_n)$ — n -мерный вектор потока "плотности вероятности"

$$I_j = -A_j(x)f - B_{je} \frac{\partial f}{\partial x_e} \quad (36)$$

Матрицу коэффициентов $B_{je}(x)$ будем считать симметричной и положительно определенной. Тогда существует обратная матрица B_{je}^{-1} , такая, что $B_{je}^{-1} B_{em} = \delta_{jm}$.

Умножим (36) на B_{ej}^{-1} и просуммируем по j от 1 до n , тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x_e} = -B_{ej}^{-1} (A_j f + I_j) \quad (37)$$

Рассмотрим наиболее интересный случай, когда решение ищется в классе достаточно гладких функций, для которых выполняется соотношение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad (38)$$

Задача 59. Показать [27], что условие (38) приводит к требованию выполнения следующих тождеств

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (B_{ki}^{-1} A_i) \equiv \frac{\partial}{\partial x_k} (B_{ji}^{-1} A_i), \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} (B_{ji}^{-1} I_i) + B_{ki}^{-1} A_i B_{jm}^{-1} I_m &\equiv \frac{\partial}{\partial x_j} (B_{ki}^{-1} I_i) + \\ &+ B_{ji}^{-1} A_i B_{km}^{-1} I_m. \end{aligned} \quad (40)$$

Условие (39) по существу означает потенциальность вектора $B_{ki}^{-1} A_i$, т.е.

$$B_{ki}^{-1} A_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}, \quad (41)$$

где "потенциальная функция" Φ может быть с точностью до постоянной найдена по формуле

$$\Phi \equiv x_k \int_0^1 B_{ki}^{-1}(\tau x) A_i(\tau x) d\tau \quad (42)$$

В (42) константа выбрана так, чтобы при $x = (x_1, \dots, x_n) = 0$ обращалась в нуль.

Будем искать решение уравнения (24) в виде

$$f = \exp(-\Phi) u, \quad (43)$$

где u — некоторая новая неизвестная функция.

Легко проверить, что уравнение для u получается следующим

$$\exp(-\Phi) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} [B_{ij} \exp(-\Phi) \frac{\partial u}{\partial x_j}] . \quad (44)$$

В [26,27] показано, что решение этого уравнения, может быть получено, если функция u зависит от переменных X через потенциальную функцию Φ , т.е.: $u = u(\Phi)$, тогда уравнение для u сводится к одномерному, если

$$\begin{aligned} \partial A_i / \partial x_i &= \chi_1(\Phi) , \\ A_i \partial \Phi / \partial x_i &= A_i A_k B_{ik}^{-1} = \chi_2(\Phi) \end{aligned}$$

в этом случае

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [\chi_1(\Phi) - \chi_2(\Phi)] \frac{\partial u}{\partial \Phi} + \chi_2(\Phi) \frac{\partial^2 u}{\partial \Phi^2} .$$

и эволюционный оператор \hat{E} может быть найден в явном виде [26].

Задача 90. Рассмотреть одномерное уравнение диффузии

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (45)$$

и показать, что КОР I-го порядка определяется формулой

$$f^{(1)} = f_0 + \frac{x^2}{2D} \frac{\partial f_0}{\partial t} , \quad (46)$$

f_0 удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению

$$\frac{2}{3} f_0 \left[-2D f_0 / \frac{df_0}{dt} \right]^{1/2} = A , \quad (47)$$

откуда

$$f_0 = \frac{A}{\frac{4}{3}\sqrt{Dt}} , \quad f^{(1)} = \frac{A}{\frac{4}{3}\sqrt{Dt}} \left(1 - \frac{x^2}{4Dt} \right) , \quad (48)$$

что отличается от точного решения $f = \frac{A}{\sqrt{\pi Dt}} \exp(-\frac{x^2}{4Dt}) \approx \frac{A}{\sqrt{\pi Dt}} (1 - \frac{x^2}{4Dt} + \dots)$ заменой $\sqrt{\pi} \rightarrow 4/3$.

Построение эволюционного оператора \hat{E} , исходя из уравнения

Фоккера-Планка можно осуществить следующим образом. Поскольку

$$I_i = -A_i f - B_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} = -B_{ij} e^{-\Phi} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}, \text{ то отсюда}$$

$$u = u_0 + x_k \int_0^1 B_{ki}^{-1}(\tau x) I_i(\tau x) \exp[\Phi(\tau x)] d\tau. \quad (49)$$

Вектор потока можно представить в виде суммы $I_i = I_i^e + \tilde{I}_i$, где I_i^e — часть потока, соответствующего состоянию равновесия, а \tilde{I}_i — неравновесная часть.

Поэтому из (37) и (49) получаем $f = f^e + \hat{E} f$;

$$f^e = \exp(-\Phi) [u_0 + x_k \int_0^1 B_{ki}^{-1}(\tau x) I_i^e(\tau x) \exp[\Phi(\tau x)] d\tau], \quad (50)$$

$$\hat{E} f = x_k \exp(-\Phi) \int_0^1 B_{ki}^{-1}(\tau x) \Psi_i \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \exp[\Phi(\tau x)] d\tau, \quad (51)$$

где $\tilde{I}_i = \Psi_i \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)$ и основная трудность состоит в нахождении этой функциональной зависимости. Неравновесная часть потока подчиняется тем же уравнениям, что и сам вектор потока, т.е.

$$-\frac{\partial \tilde{I}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (52)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} [B_{kj}^{-1} \tilde{I}_j \exp(\Phi)] \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} [B_{ki}^{-1} \tilde{I}_i \exp(\Phi)]. \quad (53)$$

Если не принимать во внимание, что \tilde{I}_i должно подчиняться уравнению (53), то можно указать частное решение (52)

$$\tilde{I}_i = -x_k \int_0^1 \tau^{n-1} \frac{\partial f(\tau x)}{\partial t} d\tau. \quad (54)$$

Эту формулу можно использовать для приближенного построения эволюционного оператора \hat{E} . Подставляя (54) в (51) находим, что

$$\hat{E} f = \exp(-\Phi) x_k x_k \int_0^1 d\tau \tau \exp[\Phi(\tau x)] B_{ki}^{-1}(\tau x) \int_0^1 d\tau' \tau'^{n-1} \frac{\partial f}{\partial t}(\tau \tau' x). \quad (55)$$

В [27] было отмечено также, что для совместного аналитического решения системы уравнений (50) и (51) может оказаться эффективным

метод внешних дифференциальных форм. Теория внешних и дифференциальных форм изложена, например, в книгах [28-31].

В частности для нахождения частных решений дивергентных уравнений можно использовать лемму Пуанкаре [28-31].

Пусть имеем уравнение

$$\frac{\partial I_i}{\partial x_i} = \varphi(x_1, \dots, x_n) \quad (56)$$

Введем форму $\theta = (-1)^{i-1} I_i \Omega_i$, где $\Omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, $d\theta = (\partial I_i / \partial x_i) \Omega$, а индекс i означает отсутствие i -го дифференциала.

Введем форму $F = \varphi \Omega$, при этом $d\theta = F$ и $dF = 0$. Используя лемму Пуанкаре F_i , для которой $dF_i = F$, можно записать в виде

$$F_i = x_i \int_0^1 d\tau \tau^{n-1} \varphi(x\tau) (-1)^{i-1} \Omega_i + (-1)^{i-1} (\text{rot } \vec{a})_i \Omega_i,$$

$\vec{a}(x)$ — произвольное векторное поле.

Отсюда получаем частное решение уравнения (56)

$$I_i = x_i \int_0^1 d\tau \tau^{n-1} \varphi(x_1 \tau, \dots, x_n \tau).$$

Таким образом, метод внешних дифференциальных форм позволяет надеяться на получение решения системы (50), (51) и построение эволюционного оператора \hat{E} непосредственно из самого уравнения Фоккера-Планка.

Перейдем теперь к обсуждению конкретных задач.

106). Релаксация гармонического осциллятора с одноквантовыми переходами

Рассмотрим одномодовый гармонический осциллятор, взаимодействующий с диссипативной средой. Его матрица плотности удовлетворяет уравнению [11, 13]

$$\begin{aligned} \partial \hat{\rho} / \partial t = & -\frac{1}{2} \gamma [\langle \nu \rangle + 1] (\hat{a}^+ \hat{a} \hat{\rho} - 2 \hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^+ + \hat{\rho} \hat{a}^+ \hat{a}) + \\ & + \langle \nu \rangle (\hat{a} \hat{a}^+ \hat{\rho} - 2 \hat{a}^+ \hat{\rho} \hat{a} + \hat{\rho} \hat{a} \hat{a}^+), \end{aligned} \quad (57)$$

являющегося частным случаем уравнения (II), в котором \hat{a} и \hat{a}^+ бозонные операторы переходов между соседними уровнями осциллятора.

Как и в (II) $\langle \nu \rangle = \left(\exp \frac{\hbar \omega_0}{k_B T} - 1 \right)^{-1}$ — среднее число квантов в моде, а γ — константа затухания.

Кроме того, в (57) опущены члены, которые связаны с эффектами типа Лэмбовского сдвига уровней.

В статьях [11, 12] Б.Я. Зельдовичем, А.М. Переломовым и В.С. Поповым для отыскания решений уравнения (57) был совершен переход к представлению чисел заполнения и использован метод производящих функций.

Мы здесь, следуя [13, 15], сведем операторное уравнение (57) к уравнению Фоккера-Планка на плоскости.

Будем предполагать, что для матрицы плотности осциллятора существует диагональное P — представление Глаубера-Сударшана

$$\hat{\rho}(t) = \int \frac{d\alpha d\bar{\alpha}}{2\pi i} P(\alpha, \bar{\alpha}; t) |\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (58)$$

Представление матрицы плотности в диагональной форме по когерентным состояниям активно обсуждалось Клаудером и Сударшаном [28, 29]. Было выяснено, что (58) имеет смысл для широкого класса физически интересных смешанных состояний осциллятора.

При подстановке (58) в (57) необходимо определить правила, по которым операторы \hat{a} , \hat{a}^+ действуют на "проекторы" $|\alpha\rangle\langle\alpha|$

Поскольку для когерентных состояний Глаубера $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ и $|\alpha\rangle = \exp(\alpha\hat{a}^+ - \bar{\alpha}\hat{a})|0\rangle$, то

$$\hat{a}|\alpha\rangle\langle\alpha| = \alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (59a)$$

$$|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{a}^+ = (\hat{a}|\alpha\rangle\langle\alpha|)^+ = \bar{\alpha}|\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (59б)$$

$$\begin{aligned} \hat{a}^+|\alpha\rangle\langle\alpha| &= \hat{a}^+ \exp(\alpha\hat{a}^+ - \bar{\alpha}\hat{a})|0\rangle\langle 0| \exp(\bar{\alpha}\hat{a} - \alpha\hat{a}^+) = \\ &= e^{-|\alpha|^2} \hat{a}^+ e^{\alpha\hat{a}^+} |0\rangle\langle 0| e^{\bar{\alpha}\hat{a}} = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \bar{\alpha} \right) |\alpha\rangle\langle\alpha|, \end{aligned} \quad (59в)$$

$$|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{a} = (\hat{a}^+|\alpha\rangle\langle\alpha|)^+ = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} + \alpha \right) |\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (59г)$$

Задача 91. Подставить (58) в (57) и показать, используя формулы (59) и интегрируя по частям, что $P(\alpha, \bar{\alpha}; t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\gamma}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha P) + \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} (\bar{\alpha} P) + 2 \langle \nu \rangle \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}} \right\} \quad (60)$$

Указание: Рассмотрим, например, слагаемое $\hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{p}$ из (57)

$$\begin{aligned} \hat{a} \hat{a}^\dagger \int d\bar{\alpha} \wedge d\alpha P(\alpha, \bar{\alpha}; t) |\alpha\rangle \langle \alpha| &= \hat{a} \int d\bar{\alpha} \wedge d\alpha P(\alpha, \bar{\alpha}; t) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \bar{\alpha} \right) |\alpha\rangle \langle \alpha| = \\ &= \hat{a} \int d\bar{\alpha} \wedge d\alpha \left(\bar{\alpha} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) P(\alpha, \bar{\alpha}; t) |\alpha\rangle \langle \alpha| = \\ &= \int d\bar{\alpha} \wedge d\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| \alpha \left(\bar{\alpha} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) P(\alpha, \bar{\alpha}; t) = \\ &= \int d\bar{\alpha} \wedge d\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| \left(1 + \alpha \bar{\alpha} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha \right) P(\alpha, \bar{\alpha}; t). \end{aligned}$$

При выполнении интегрирования по частям необходимо учитывать граничное условие

$$|P(\alpha, \bar{\alpha}; t)| \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow \infty} 0. \quad (61)$$

Отметим, что (60) совпадает с уравнением, описывающим броуновское движение в фазовом пространстве классического осциллятора [13]. Кроме того, аналогичное уравнение использовалось Льюиселлом и Глаубером (см., например, [14, 32]) для описания матрицы плотности модельного счетчика фотонов.

Пропагатор уравнения вида (60) был найден в работе [30] (см. также, статью Г.Хакена и В.Вайдлиха в [31]).

Применим для нахождения пропагатора групповые методы, которые основаны на том интересном факте, что операторы $\partial^2 / \partial \alpha \partial \bar{\alpha}$ и $\partial / \partial \alpha \cdot \alpha + \partial / \partial \bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha}$ входят в число генераторов алгебры Ли группы $SU(1,1) \approx SL(2, R)$.

Рассмотрим вначале для простоты одномерный аналог уравнения (60)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \gamma \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} x + \langle \nu \rangle \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] f = \frac{1}{2} \gamma \hat{L} f \quad (62)$$

Так как \hat{L} явно не зависит от времени, то формальное решение уравнения (62) можно записать в виде

$$|f(t)\rangle = \exp\left(\frac{\gamma t}{2} \hat{L}\right) |f(0)\rangle, \quad (63)$$

откуда $f(x, t) = \int \langle x | \exp(\frac{1}{2} \gamma t \hat{L}) | x_0 \rangle f(x_0, 0) dx_0$,

где $f(x, t) = \langle x | f(t) \rangle$, а матричный элемент $\langle x | \exp(\frac{1}{2} \gamma t \hat{L}) | x_0 \rangle = \mathcal{K}(x, t | x_0, 0)$ — пропагатор уравнения (62).
Имеем для него

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x, t | x_0, 0) &\equiv \langle x | \exp\left\{\frac{1}{2} \gamma t \left[\langle \nu \rangle \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} x\right]\right\} | x_0 \rangle = \\ &= \langle x | \exp\left\{\frac{\langle \nu \rangle}{2} (1 - e^{-\gamma t}) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} \exp\left(\frac{1}{2} \gamma t \frac{\partial}{\partial x} x\right) | x_0 \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\langle \nu \rangle}{2} (1 - e^{-\gamma t}) p^2 + i(x - e^{-\frac{\gamma t}{2}} x_0) p\right\} dp \\ &= [2\pi \langle \nu \rangle (1 - e^{-\gamma t})]^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(x - e^{-\frac{\gamma t}{2}} x_0)^2}{2\langle \nu \rangle (1 - e^{-\frac{\gamma t}{2}})}\right\}, \end{aligned} \quad (64)$$

что совпадает с пропагатором, приведенным в [31] для одномерного случая. В промежуточных выкладках были введены состояния $|P\rangle$, собственные для оператора "импульса" — $i \frac{\partial}{\partial x} |P\rangle = P |P\rangle$,

$\langle x | P \rangle = (1/\sqrt{2\pi}) \exp(ixP)$, и использованы соотношения $[\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x} x] = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, откуда

$$\exp\left[\tau \left(\nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} x\right)\right] = \exp\left[\frac{\nu}{2} (1 - e^{-2\tau}) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] \exp\left(\tau \frac{\partial}{\partial x} x\right);$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} x, x\right] = x \longrightarrow \exp\left(\tau \frac{\partial}{\partial x} x\right) |x_0\rangle = |e^{-\tau} x_0\rangle.$$

Задача 92. Действуя аналогичным образом, проверить, что у двумерного уравнения (60) ($\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$; $4 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}$) пропагатор имеет вид

$$\mathcal{K}(\alpha, t | \alpha_0, t_0) = \frac{1}{\langle \nu \rangle (1 - e^{-\gamma(t-t_0)})} \exp\left\{\frac{-|\alpha - \alpha_0 e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t_0)}|^2}{\langle \nu \rangle (1 - e^{-\gamma(t-t_0)})}\right\}. \quad (65)$$

Видно, что при $t - t_0 \rightarrow +\infty$ пропагатор переходит в P — символ равновесной матрицы плотности $\hat{\rho}$ при температуре T .

$$P(\alpha, \bar{\alpha}) = \frac{1}{\langle \nu \rangle} e^{-\frac{|\alpha|^2}{\langle \nu \rangle}}. \quad (66)$$

Задача 93. Представить равновесную матрицу плотности осциллятора $\hat{\rho} = [1 - \exp(-\hbar\omega/k_B T)] \exp[-\hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} / k_B T]$ в антинормально упорядоченном виде и проверить, что её P — символ имеет вид (66).

Заметим, что для нахождения $P(\alpha, \bar{\alpha})$ удобно ввести т.н. нор-

мально упорядоченную характеристическую функцию [32]

$$\begin{aligned}\chi_N(\xi) &= \text{Sp} [\hat{\rho} \exp(\xi \hat{a}^+) \exp(-\bar{\xi} \hat{a})] = \\ &= \int \frac{d\bar{\alpha} \Lambda d\alpha}{2\pi i} P(\alpha, \bar{\alpha}) \exp(\xi \bar{\alpha} - \bar{\xi} \alpha).\end{aligned}\quad (67)$$

Нетрудно заметить, что (67) является двумерным преобразованием Фурье и если оно обратимо, то

$$P(\alpha, \bar{\alpha}) = \int \frac{d\bar{\xi} \Lambda d\xi}{2i} \chi_N(\xi) \exp(\bar{\xi} \alpha - \xi \bar{\alpha}). \quad (68)$$

Функция $\chi_N(\xi)$ может быть вычислена для известного оператора $\hat{\rho}$ и если $\chi_N(\xi)$ обладает двумерным преобразованием Фурье, формула (68) может быть использована для непосредственного определения P - символа.

В общем случае, если $P_0(\eta, \bar{\eta}, t_0)$ заданное начальное распределение квазивероятности, то квазивероятность в произвольный момент времени

$$P(\alpha, \bar{\alpha}, t) = \int \mathcal{K}(\alpha, t | \eta, t_0) P_0(\eta, \bar{\eta}, t_0) \frac{d\bar{\eta} \Lambda d\eta}{2\pi i}. \quad (69)$$

Эволюция среднего значения оператора \hat{B} , относящегося к динамической подсистеме, определяется формулой

$$\begin{aligned}\langle \hat{B}(t) \rangle &= \text{Sp} [\hat{\rho}(t) \hat{B}] = \int \frac{d\bar{\alpha} \Lambda d\alpha}{2\pi i} P(\alpha, \bar{\alpha}, t) \langle \alpha | \hat{B} | \alpha \rangle = \\ &= \int \frac{d\bar{\alpha} \Lambda d\alpha}{2\pi i} P(\alpha, \bar{\alpha}, t) \cdot Q_B(\alpha, \bar{\alpha}).\end{aligned}\quad (70)$$

В частности, если $\hat{B} = |n\rangle\langle n|$, то

$$\text{Sp} [\hat{\rho}(t) |n\rangle\langle n|] \equiv \omega_n(t) = \int \frac{d\bar{\alpha} \Lambda d\alpha}{2\pi i} P(\alpha, \bar{\alpha}, t) |\langle \alpha | n \rangle|^2 \quad (71)$$

- изменение во времени вероятности пребывания осциллятора на n -ом уровне. Найдем $\omega_n(t)$ в некоторых частных случаях.

Если в начальный момент $t_0 = 0$ осциллятор находился в (чистом) когерентном состоянии $\hat{\rho}(0) = |\alpha_0\rangle\langle \alpha_0|$, $P_0(\eta, \bar{\eta}, 0) = \delta^{(2)}(\eta - \alpha_0)$ и $P(\alpha, \bar{\alpha}, t) = \mathcal{K}(\alpha, t | \alpha_0, 0)$, поэтому

$$\omega_n(t) = \int \frac{d\bar{\alpha} \Lambda d\alpha}{2\pi i} \mathcal{K}(\alpha, t | \alpha_0, 0) |\langle \alpha | n \rangle|^2, \quad (72)$$

где $\langle \alpha | h \rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$ - волновая функция гармонического осциллятора в когерентном представлении. Вычисляя интеграл из (72) в полярных координатах ($\alpha = |\alpha| e^{i\varphi}$, $\frac{d\alpha \wedge d\alpha}{2i} = |\alpha| d|\alpha| d\varphi$), получаем

$$w_n(t) = \frac{[(1 - e^{-\gamma t}) \langle \nu \rangle]^n}{[1 + \langle \nu \rangle (1 - e^{-\gamma t})]^{n+1}} \cdot \exp \left\{ - \frac{e^{-\gamma t} |\alpha_0|^2}{1 + (1 - e^{-\gamma t}) \langle \nu \rangle} \right\} \cdot L_n \left(- \frac{e^{-\gamma t} |\alpha_0|^2}{\langle \nu \rangle (1 - e^{-\gamma t}) [1 + \langle \nu \rangle (1 - e^{-\gamma t})]} \right) \quad (73)$$

где $L_n(x)$ - полином Лагерра.

Если $T = 0$, то, и $\langle \nu \rangle = 0$ формула (73) приобретает вид распределения Пуассона

$$w_n(t, T=0) = \exp(-e^{-\gamma t} |\alpha_0|^2) \frac{(e^{-\gamma t} |\alpha_0|^2)^n}{n!} \quad (74)$$

Задача 94. Проверить, что при тех же начальных условиях ($\hat{\rho}(0) = |\alpha_0\rangle \langle \alpha_0|$) для $T=0$ осциллятор релаксирует, оставаясь в когерентном состоянии $\hat{\rho}(t) = |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)|$, где $\alpha(t) = \alpha_0 \exp(-\frac{1}{2}\gamma t)$.

Указание: Матричные элементы $\rho_{mn}(0) = e^{-|\alpha_0|^2} \frac{\alpha_0^m \bar{\alpha}_0^n}{\sqrt{m!n!}}$.

Найти вид матричного элемента $\rho_{mn}(t)$ и совершить переход к $\langle \nu \rangle \rightarrow 0$.

В работе [12] было показано, что случай задачи 94 является единственным, когда в процессе релаксации состояние осциллятора все время остается чистым.

Задача 95. Пусть при $t=0$ осциллятор находился в термодинамически равновесном состоянии с температурой $T_1 \neq T$, где T - температура термостата. Показать, что распределение по уровням $w_n(t)$ в каждый момент времени остается планковским, в котором температура меняется от T_1 до T в соответствии с уравнением $\bar{n}(t) = e^{-\gamma t} \langle \nu' \rangle + (1 - e^{-\gamma t}) \langle \nu \rangle$ (Ю. Шниггер [33]).

10в). Релаксация осциллятора, взаимодействующего с классической силой

Взаимодействие осциллятора с термостатом носит характер случайной силы. Обобщим уравнение (57) на тот случай, когда на осциллятор действует, кроме того, классическая (детерминированная), зависящая

от времени сила $F(t)$

[12]

Уравнение для \hat{p}
имеет вид

в представлении взаимодействия прини-

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial t} = -i[\hat{V}(t), \hat{p}] - \frac{\gamma}{2} \{ (\langle \nu \rangle + 1)(\hat{a}^+ \hat{a} \hat{p} - 2\hat{a} \hat{p} \hat{a}^+ + \hat{p} \hat{a}^+ \hat{a}) + \langle \nu \rangle (\hat{a} \hat{a}^+ \hat{p} - 2\hat{a}^+ \hat{p} \hat{a} + \hat{p} \hat{a} \hat{a}^+) \}, \quad (75)$$

где $\hat{V}(t) = -F(t)x_- = -(2\omega_0)^{-1/2} [F(t)e^{-i\omega_0 t} \hat{a} + F(t)e^{i\omega_0 t} \hat{a}^+]$.

Задача 96. Действуя аналогично выводу уравнения Фоккера-Планка (60), показать, что контрвариантный P - символ матрицы плотности $\hat{\rho}(t)$ из (75) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{P}(\alpha, \bar{\alpha}, t)}{\partial t} = \frac{\gamma}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{A}(t) + \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \bar{\mathcal{A}}(t) + 2\langle \nu \rangle \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}} \right\} \mathcal{P}, \quad (76)$$

$$\mathcal{A}(t) = \alpha + i(2\omega_0)^{-1/2} F(t) e^{i\omega_0 t},$$

а его решение имеет вид

$$\mathcal{P}(\alpha, \bar{\alpha}, t) = \int \frac{d\alpha' d\bar{\alpha}'}{2\pi i} \tilde{\mathcal{K}}(\alpha, t | \alpha', 0) \mathcal{P}_0(\alpha', \bar{\alpha}', 0). \quad (77)$$

Здесь $\tilde{\mathcal{K}}(\alpha, t | \alpha', 0) =$

$$= [(1 - e^{-\gamma t}) \langle \nu \rangle]^{-1} \exp \left\{ - \frac{|\alpha - e^{-\frac{\gamma t}{2}} \alpha' - \beta(t)|^2}{\langle \nu \rangle (1 - e^{-\gamma t})} \right\} \quad (78)$$

- пропагатор уравнения (78), где

$$\beta(t) = i(2\omega_0)^{-1/2} \int_0^t F(t') \exp \left[-\frac{\gamma}{2}(t-t') + i\omega_0 t' \right] dt'$$

Указание: Подстановкой $\mathcal{P}(\alpha, \bar{\alpha}, t) = e^{\beta(t) \frac{\partial}{\partial \alpha} + \bar{\beta}(t) \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}}} P(\alpha, \bar{\alpha}, t)$ (76) приводится к уравнению вида (60) для функции $P(\alpha, \bar{\alpha}, t)$. Поэтому можем написать

$$\mathcal{P}(t) = \exp \left[\beta(t) \frac{\partial}{\partial \alpha} + \bar{\beta}(t) \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \right] \exp \left[\frac{\gamma t}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \bar{\alpha} + \langle \nu \rangle \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}} \right] \right] \mathcal{P}(0)$$

и, переходя к вещественным переменным ($\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$), применить метод, аналогичный получению формул (64), (65).

Из формулы (78) видно, что пропагатор является гауссовым пакетом на комплексной α - плоскости, центр которого "испытывает затухание" пропорционально $\exp(-\gamma t/2)$ и смещается на вектор $\beta(t)$ под действием детерминированной внешней силы $F(t)$. Если $T > 0$, то $\langle \nu \rangle \neq 0$ и за счет взаимодействия с термостатом в системе нарастают флуктуации - гауссовый пакет расплывается по комплексной плоскости.

Задача 97. Рассчитать зависимости от времени вероятностей $\omega_n(t)$ (см. формулу (71)) при разных начальных условиях для матрицы плотности $\hat{\rho}(0)$ [126].

$$1) \hat{\rho}(0) = |\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|,$$

показать, что в этом случае при $\langle \nu \rangle = 0$ осциллятор остается в чистом когерентном состоянии $|\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)|$, где

$$\alpha(t) = \alpha_0 \exp(-\gamma t/2) + \beta(t).$$

$$2) \hat{\rho}(0) = \int \frac{d\bar{\xi} d\xi}{2\pi i} \Phi_0(\bar{\xi}, \xi) |\xi\rangle\langle\xi|,$$

где

$$\Phi_0(\bar{\xi}, \xi) = \frac{1}{\langle \nu \rangle} \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{\langle \nu \rangle}\right),$$

$$\langle \nu \rangle = \left(\exp(\hbar\omega_0/k_B T) - 1 \right)^{-1}.$$

3) $\hat{\rho}(0) = |N\rangle\langle N|$ - при $t=0$ система находится в чистом N - квантовом состоянии.

Следуя работе [126], обсудим теперь вопрос о спектре излучения заряженного осциллятора, на который действует сила $F(t)$. Можно подумать, что поскольку сила $F(t)$ вызывает переходы между уровнями $E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2)$, то спектр излучения состоит из гармоник $\omega_n = n\omega_0$. Однако это не так, и как для классического осциллятора спектр излучения здесь определяется спектром силы $F(t)$. В квантовом случае это есть следствие эквидистантности уровней энергии осциллятора, которая приводит к интерференции квантов, испущенных при переходах между различными уровнями. Последнее разъясняет так называемый "парадокс гармонического осциллятора" [12а, 34, 35]. (Классическая ширина линии излучения не зависит от амплитуды осциллятора. С квантовомеханической точки зрения матричный элемент перехода $\sim \sqrt{n}$, а ширина $\sim n$. Поэтому, казалось бы, для перехода $|n\rangle \rightarrow |n-1\rangle$ ширина линии $\sim 2n-1$, т.е. ширина линии

должна увеличиваться при возбуждении ($n \rightarrow \infty$), что противоречит классическому результату — для высоковозбужденных уровней должен происходить переход к классике).

Согласно общим принципам квантовой механики [5] контур линии излучения осциллятора определяется корреляционной функцией $\langle \hat{a}^+(t+\tau) \hat{a}(t) \rangle$ по формуле

$$g(\omega) = 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty dt \int_0^\infty d\tau e^{i\omega\tau} \langle \hat{a}^+(t+\tau) \hat{a}(t) \rangle, \quad (79)$$

где корреляционная функция $\langle \hat{a}^+(t+\tau) \hat{a}(t) \rangle$ имеет вид

$$\langle \hat{a}^+(t+\tau) \hat{a}(t) \rangle = S_p(\hat{\rho}(0) \hat{a}^+(t+\tau) \hat{a}(t)). \quad (80)$$

Для нахождения вида операторов $\hat{a}^+(t)$, $\hat{a}(t)$ вернемся к исходной модели (модель Льюиселла [32, 36], в гамильтониане которой наряду с взаимодействием с осцилляторами термостата учтем слагаемые, дающие взаимодействие с внешней силой $F(t)$)

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1, \quad (81)$$

$$\hat{H}_0 = \omega_0 \hat{a}^+ \hat{a} + \sum_k \omega_k \hat{b}_k^+ \hat{b}_k,$$

$$\hat{H}_1 = \sum_k (f_k \hat{a}^+ \hat{b}_k + \bar{f}_k \hat{a} \hat{b}_k^+) - \frac{1}{\sqrt{2}\omega_0} (F(t) \hat{a}^+ + \bar{F}(t) \hat{a}).$$

В представлении взаимодействия уравнения движения для операторов $\hat{a}(t)$, $\hat{b}_k(t)$ выглядят следующим образом

$$d\hat{a}/dt = -i \sum_k f_k e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} \hat{b}_k + \frac{i}{\sqrt{2}\omega_0} F(t) e^{i\omega_0 t}, \quad (82)$$

$$d\hat{b}_k/dt = -i f_k e^{i(\omega_k - \omega_0)t} \hat{a}.$$

Решение для $\hat{a}(t)$ в приближении Вайскоффа-Вигнера [36] имеет вид

$$\hat{a}(t) = e^{-it(\omega_0 - i\gamma/2)} \hat{a}(0) + \sum_k \beta_k(t) \hat{b}_k(0) + e^{-i\omega_0 t} \beta(t) \quad (83)$$

где $\beta_k(t) = f_k (e^{-i\omega_k t} - e^{-it(\omega_0 - i\gamma/2)})$, а $\beta(t)$ определено в (78).

Задача 98. Вывести формулу (83).

Указание: Система уравнений (82) линейна, поэтому с операторами \hat{a} и \hat{b}_k можно обращаться как с классическими величинами ($[\hat{a}, \hat{b}_k] = 0$).

Удобно перейти к системе алгебраических уравнений для лапласовских образов операторов $\hat{a}(t)$ и $\hat{b}_k(t)$, а при выполнении интегрирования в обратном преобразовании Лапласа, совершить предельный переход к бесконечно большому числу осцилляторов термостата (как и при выводе кинетического уравнения (II) для матрицы плотности динамической подсистемы).

Подставляя (83) в (80) получаем [126] для случая нулевой температуры ($\langle \nu \rangle = 0$)

$$\langle \hat{a}^+(t+\tau) \hat{a}(t) \rangle = e^{-i\omega_0\tau} \left[\langle n(0) \rangle e^{-\frac{\gamma}{2}(2t+\tau)} + \bar{\beta}(t+\tau) \beta(t) \right], \quad (84)$$

где $\langle n(0) \rangle = \langle \hat{a}^+(0) \hat{a}(0) \rangle$ и сделано предположение, что $\langle \hat{a}^+(0) \rangle = \langle \hat{a}(0) \rangle = 0$.

Вычисляя интегралы в (79), имеем

$$g(\omega) = \frac{\gamma \{ \langle n(0) \rangle + |F(\omega)|^2 \}}{2\pi [(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4]} \quad (85)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \int_0^\infty F(t) e^{i\omega t} dt.$$

Первое слагаемое в (85) соответствует вынуживанию начального возбуждения осциллятора, а второе — излучение под действием внешней силы $F(t)$. При этом видно, что спектр излучения квантового осциллятора действительно такой же как и в классике.

10г). Релаксация параметрически возбуждаемого осциллятора

Важной особенностью предыдущей задачи является то, что даже при наличии внешней силы $F(t)$ операторы рождения и уничтожения не перемешиваются в процессе релаксации.

Рассмотрим в противоположность этому осциллятор с параметрически меняющейся частотой $\omega(t)$, который с учетом взаимодействия с термостатом, задан гамильтонианом

$$\hat{H}(t) = \frac{\omega_0^2 + \omega^2(t)}{4\omega_0} \hat{a}^+ \hat{a} - \frac{\omega_0^2 - \omega^2(t)}{4\omega_0} [(\hat{a}^+)^2 + \hat{a}^2] + \sum_k \omega_k \hat{b}_k^+ \hat{b}_k + \sum_k (f_k \hat{a}^+ \hat{b}_k + \bar{f}_k \hat{a} \hat{b}_k^+). \quad (\omega(t=0) = \omega_0) \quad (86)$$

где u — некоторая новая неизвестная функция.

Легко проверить, что уравнение для u получается следующим

$$\exp(-\Phi) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} [B_{ij} \exp(-\Phi) \frac{\partial u}{\partial x_j}] . \quad (44)$$

В [26,27] показано, что решение этого уравнения, может быть получено, если функция u зависит от переменных x через потенциальную функцию Φ , т.е. $u = u(\Phi)$, тогда уравнение для u сводится к одномерному, если

$$\partial A_i / \partial x_i = \chi_1(\Phi) ,$$

$$A_i \partial \Phi / \partial x_i = A_i A_k B_{ik}^{-1} = \chi_2(\Phi)$$

в этом случае

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [\chi_1(\Phi) - \chi_2(\Phi)] \frac{\partial u}{\partial \Phi} + \chi_2(\Phi) \frac{\partial^2 u}{\partial \Phi^2} .$$

и эволюционный оператор \hat{E} может быть найден в явном виде [26].

Задача 90. Рассмотреть одномерное уравнение диффузии

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (45)$$

и показать, что КФР I -го порядка определяется формулой

$$f^{(i)} = f_0 + \frac{x^2}{2D} \frac{\partial f_0}{\partial t} , \quad (46)$$

f_0 удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению

$$\frac{2}{3} f_0 \left[-2D f_0 / \frac{df_0}{dt} \right]^{1/2} = A , \quad (47)$$

откуда

$$f_0 = \frac{A}{\frac{4}{3} \sqrt{Dt}} , \quad f^{(i)} = \frac{A}{\frac{4}{3} \sqrt{Dt}} \left(1 - \frac{x^2}{4Dt} \right) , \quad (48)$$

что отличается от точного решения $f = \frac{A}{\sqrt{\pi Dt}} \exp(-\frac{x^2}{4Dt}) \approx \frac{A}{\sqrt{\pi Dt}} (1 - \frac{x^2}{4Dt} + \dots)$ заменой $\sqrt{\pi} \rightarrow 4/3$.

Построение эволюционного оператора \hat{E} , исходя из уравнения

Фоккера-Планка можно осуществить следующим образом. Поскольку

$$I_i = -A_i f - B_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} = -B_{ij} e^{-\Phi} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \text{ то отсюда}$$

$$u = u_0 + x_k \int_0^1 B_{ki}^{-1}(\tau x) I_i(\tau x) \exp[\Phi(\tau x)] d\tau. \quad (49)$$

Вектор потока можно представить в виде суммы $I_i = I_i^e + \tilde{I}_i$, где I_i^e — часть потока, соответствующего состоянию равновесия, а \tilde{I}_i — неравновесная часть.

Поэтому из (37) и (49) получаем $f = f^e + \hat{E} f$,

$$f^e = \exp(-\Phi) \left[u_0 + x_k \int_0^1 B_{ki}^{-1}(\tau x) I_i^e(\tau x) \exp[\Phi(\tau x)] d\tau \right], \quad (50)$$

$$\hat{E} f = x_k \exp(-\Phi) \int_0^1 B_{ki}^{-1}(\tau x) \Psi_i \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \exp[\Phi(\tau x)] d\tau, \quad (51)$$

где $\tilde{I}_i = \Psi_i \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)$ и основная трудность состоит в нахождении этой функциональной зависимости. Неравновесная часть потока подчиняется тем же уравнениям, что и сам вектор потока, т.е.

$$-\frac{\partial \tilde{I}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (52)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} [B_{ij}^{-1} \tilde{I}_j \exp(\Phi)] \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} [B_{kj}^{-1} \tilde{I}_j \exp(\Phi)]. \quad (53)$$

Если не принимать во внимание, что \tilde{I}_i должно подчиняться уравнению (53), то можно указать частное решение (52)

$$\tilde{I}_i = -x_i \int_0^1 \tau^{n-1} \frac{\partial f(\tau x)}{\partial t} d\tau. \quad (54)$$

Эту формулу можно использовать для приближенного построения эволюционного оператора \hat{E} . Подставляя (54) в (51) находим, что

$$\hat{E} f = \exp(-\Phi) x_i x_k \int_0^1 d\tau \tau \exp[\Phi(\tau x)] B_{ki}^{-1}(\tau x) \int_0^1 d\tau' \tau'^{n-1} \frac{\partial f}{\partial t}(\tau \tau' x). \quad (55)$$

В [27] было отмечено также, что для совместного аналитического решения системы уравнений (50) и (51) может оказаться эффективным

метод внешних дифференциальных форм. Теория внешних и дифференциальных форм изложена, например, в книгах [28-31].

В частности для нахождения частных решений дивергентных уравнений можно использовать лемму Пуанкаре [28-31].

Пусть имеем уравнение

$$\frac{\partial I_i}{\partial x_i} = \varphi(x_1, \dots, x_n) \quad (56)$$

Введем форму $\theta = (-1)^{i-1} I_i \Omega_i$, где $\Omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, $d\theta = (\partial I_i / \partial x_i) \Omega$, а индекс i означает отсутствие i -го дифференциала.

Введем форму $F = \varphi \Omega$, при этом $dF = F$ и $dF = 0$. Используя лемму Пуанкаре F_i , для которой $dF_i = F$, можно записать в виде

$$F_i = x_i \int_0^1 d\tau \tau^{n-1} \varphi(x\tau) (-1)^{i-1} \Omega_i + (-1)^{i-1} (\text{rot } \vec{a})_i \Omega_i,$$

$\vec{a}(x)$ - произвольное векторное поле.

Отсюда получаем частное решение уравнения (56)

$$I_i = x_i \int_0^1 d\tau \tau^{n-1} \varphi(x_1 \tau, \dots, x_n \tau).$$

Таким образом, метод внешних дифференциальных форм позволяет надеяться на получение решения системы (50), (51) и построение эволюционного оператора \hat{E} непосредственно из самого уравнения Фока-Планка.

Перейдем теперь к обсуждению конкретных задач.

106). Релаксация гармонического осциллятора с одноквантовыми переходами

Рассмотрим одномодовый гармонический осциллятор, взаимодействующий с диссипативной средой. Его матрица плотности удовлетворяет уравнению [11, 13]

$$\begin{aligned} \partial \hat{\rho} / \partial t = & -\frac{1}{2} \gamma [\langle \nu \rangle + 1] (\hat{a}^+ \hat{a} \hat{\rho} - 2 \hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^+ + \hat{\rho} \hat{a}^+ \hat{a}) + \\ & + \langle \nu \rangle (\hat{a} \hat{a}^+ \hat{\rho} - 2 \hat{a}^+ \hat{\rho} \hat{a} + \hat{\rho} \hat{a} \hat{a}^+), \end{aligned} \quad (57)$$

являющегося частным случаем уравнения (II), в котором \hat{a} и \hat{a}^+ бозонные операторы переходов между соседними уровнями осциллятора.

Как и в (II) $\langle \nu \rangle = \left(\exp \frac{\hbar \omega_0}{k_B T} - 1 \right)^{-1}$ - среднее число квантов в моде, а γ - константа затухания.

Кроме того, в (57) опущены члены, которые связаны с эффектами типа Лэмбовского сдвига уровней.

В статьях [11,12] Б.Я.Зельдовичем, А.М.Переломовым и В.С.Половым для отыскания решений уравнения (57) был совершен переход к представлению чисел заполнения и использован метод производящих функций.

Мы здесь, следуя [13,15], сведем операторное уравнение (57) к уравнению Фоккера-Планка на плоскости.

Будем предполагать, что для матрицы плотности осциллятора существует диагональное P - представление Глаубера-Сударшана

$$\hat{\rho}(t) = \int \frac{d\alpha d\bar{\alpha}}{2\pi i} P(\alpha, \bar{\alpha}; t) |\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (58)$$

Представление матрицы плотности в диагональной форме по когерентным состояниям активно обсуждалось Клаудером и Сударшаном [28, 29]. Было выяснено, что (58) имеет смысл для широкого класса физически интересных смешанных состояний осциллятора.

При подстановке (58) в (57) необходимо определить правила, по которым операторы \hat{a} , \hat{a}^+ действуют на "проекторы" $|\alpha\rangle\langle\alpha|$

Поскольку для когерентных состояний Глаубера $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ и $|\alpha\rangle = \exp(\alpha\hat{a}^+ - \bar{\alpha}\hat{a})|0\rangle$, то

$$\hat{a}|\alpha\rangle\langle\alpha| = \alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (59a)$$

$$|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{a}^+ = (\hat{a}|\alpha\rangle\langle\alpha|)^+ = \bar{\alpha}|\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (59b)$$

$$\begin{aligned} \hat{a}^+|\alpha\rangle\langle\alpha| &= \hat{a}^+ \exp(\alpha\hat{a}^+ - \bar{\alpha}\hat{a})|0\rangle\langle 0| \exp(\bar{\alpha}\hat{a} - \alpha\hat{a}^+) = \\ &= e^{-|\alpha|^2} \hat{a}^+ e^{\alpha\hat{a}^+} |0\rangle\langle 0| e^{\bar{\alpha}\hat{a}} = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \bar{\alpha} \right) |\alpha\rangle\langle\alpha|, \end{aligned} \quad (59b)$$

$$|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{a} = (\hat{a}^+|\alpha\rangle\langle\alpha|)^+ = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} + \alpha \right) |\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (59г)$$

Задача 9I. Подставить (58) в (57) и показать, используя формулы (59) и интегрируя по частям, что $P(\alpha, \bar{\alpha}; t)$ удовлетворяет уравнению

Уравнения движения для операторов $\hat{a}, \hat{a}^+, \hat{b}_k, \hat{b}_k^+$ имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{a}}{dt} &= -2i\Omega_0(t)\hat{a} + 2i\Omega_1(t)\hat{a}^+ - i\sum_k f_k \hat{b}_k, \\ \frac{d\hat{a}^+}{dt} &= 2i\Omega_0(t)\hat{a}^+ - 2i\Omega_1(t)\hat{a} + i\sum_k \bar{f}_k \hat{b}_k^+, \\ \frac{d\hat{b}_k}{dt} &= -i\omega_k \hat{b}_k - i\bar{f}_k \hat{a}, \quad \frac{d\hat{b}_k^+}{dt} = i\omega_k \hat{b}_k^+ + i f_k \hat{a}^+.\end{aligned}\quad (87)$$

Из уравнений (87) видно, что операторы \hat{a} и \hat{a}^+ перемешиваются в процессе временной эволюции, поэтому параметрический осциллятор может усиливать свои нулевые флуктуации и излучать усиленное поле [37].

Квантовый параметрический осциллятор (без учета взаимодействия с термостатом) изучался А.М.Переломовым и В.С.Поповым в работе [38] (см. также § 4, часть I и § 7 часть II и цитированную в них литературу). В этой работе было показано, что в случае периодической модуляции частоты спектр квазиэнергий осциллятора может быть трех типов. (Здесь существенно, что у линейной динамической группы осциллятора $\widehat{Sp}(2, R) = \widehat{SU}(1, 1) = \widehat{SL}(2, R)$ имеется три типа однопараметрических подгрупп, с которыми может быть связан оператор сдвига системы во времени на период τ . Дискретному спектру квазиэнергий соответствуют устойчивые состояния осциллятора, а сплошному спектру $(-\infty < \varepsilon < +\infty)$ — неустойчивые состояния (зона параметрического резонанса) (см. более подробно § 5, часть II)).

В недавней работе [39] Я.И.Грановским, Ю.А.Димашко и А.С.Жедановым было установлено, что потере устойчивости соответствует фазовый переход в системе.

В этой работе термостат задавался температурой T и временем релаксации τ_{rel} .

Если $\tau/\tau_{rel} \gg 1$ ("медленный" осциллятор), то все термодинамические характеристики параметрического осциллятора успевают следовать изменению её параметров и матрица плотности имеет вид

$$\hat{\rho}(t) = \exp(-\hat{H}_0(t)/k_B T) / Sp(-\hat{H}_0(t)/k_B T), \quad (88)$$

здесь $\hat{H}_0(t)$ — гамильтониан осциллятора вида (86) без учета взаимодействия с термостатом.

Поскольку

$$[4\Omega_0(t)]^2 - [4\Omega_1(t)]^2 = 4\omega^2(t) \geq 0$$

у "медленного" осциллятора фазовый переход невозможен.

При $\tau/\tau_{\text{rel}} \ll 1$ ("быстрый" осциллятор) термодинамические переменные не успевают подстраиваться под изменение частоты и должно происходить усреднение параметров параметрического осциллятора за период.

В этом случае матрица плотности равна

$$\hat{\rho} = \exp(-\hat{K}/k_B T) / \text{Sp}(-\hat{K}/k_B T), \quad (89)$$

где \hat{K} - оператор квазиэнергий (квазигамильтониан), который для осциллятора имеет вид линейной комбинации

$$\hat{K} = \tilde{\Omega}_0(\tau)(\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+) - \tilde{\Omega}_1(\tau)(\hat{a}^+\hat{a}^+ + \hat{a}\hat{a})$$

и фазовый переход здесь оказывается возможным, т.к. в общем случае величина $\xi/\tau = (4\tilde{\Omega}_0)^2 - (4\tilde{\Omega}_1)^2$ может иметь любой знак. Фазовый переход происходит в полсе функции $\text{Sp} \exp(-\hat{K}/k_B T)$. Это условие совпадает (см., например § 5, 8а части II) с условием потери устойчивости $\xi=0$ или $|\text{Sp} \hat{h}(\tau)| = 2$ - (граница зон устойчивости и зоны резонанса). (Здесь $\hat{u}(\tau) = \hat{T}(\hat{h}(\tau))$, $\hat{h}(\tau) \in \text{SU}(1,1)$).

Задача 99. Показать, что статистическая сумма быстрого осциллятора равна

$$\text{Sp}(\exp(-\hat{K}/k_B T)) = 1/2 \text{sh}(\beta\xi/2\tau), \quad (90)$$

$$\beta = (k_B T)^{-1},$$

а средняя величина оператора $\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+$

$$\langle \hat{N} \rangle = \frac{\tilde{\Omega}_0}{2\tau\xi} \text{ch}(\beta\xi/2\tau). \quad (91)$$

и неограниченно возрастает при $\xi \rightarrow 0$.

Указание. При вычислении статсуммы (90) учесть, что осциллятору соответствуют два унитарных представления $T_+^{1/4}$ и $T_+^{3/4}$ группы $\text{SU}(1,1)$.

Было бы интересно исследовать задачу о параметрическом возбуждении осциллятора, взаимодействующего с термостатом, с точки зрения кинетического уравнения для матрицы плотности.

10д). Уравнение Фоккера-Планка в теории лазера

Простейшая модель одномодового лазера, представляет собой квантовый осциллятор, резонансно взаимодействующий с системой двухуровневых молекул. Такая модель дается гамильтонианом [15, 31]

$$\hat{H} = \omega_0 \hat{a}^+ \hat{a} + \sum_{k=1}^N \omega \hat{\sigma}_3^{(k)} + \lambda \sum_{k=1}^N [\hat{a}^+ \hat{\sigma}_-^{(k)} + \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(k)}], \quad (92)$$

где $\hat{\sigma}_\pm^{(k)}$, $\hat{\sigma}_3^{(k)}$ - матрицы Паули, отвечающие k -ой молекуле. Предполагается, что все молекулы неподвижны, находятся в одинаковых условиях и константа взаимодействия $\lambda = d \sqrt{\omega_0/2V}$ не зависит от координаты молекулы (d - дипольный момент перехода, V - объем системы). Рассмотрим случай точного резонанса $\omega = \omega_0$.

Задача 100. Показать, что при $N=1$ оператор эволюции, соответствующий гамильтониану (92), равен

$$\hat{U}(t) = \hat{U}_1(t) \hat{U}_2(t), \quad (93)$$

где

$$\hat{U}_1(t) = e^{-i\omega_0 t \hat{a}^+ \hat{a}} \begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega_0 t/2} \end{pmatrix}$$

$$\hat{U}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \lambda \sqrt{\hat{a} \hat{a}^+} & -i \frac{\sin t \lambda \sqrt{\hat{a} \hat{a}^+}}{\sqrt{\hat{a} \hat{a}^+}} \hat{a} \\ -i \hat{a}^+ \frac{\sin t \lambda \sqrt{\hat{a} \hat{a}^+}}{\sqrt{\hat{a} \hat{a}^+}} & \cos t \lambda \sqrt{\hat{a} \hat{a}^+} \end{pmatrix}$$

Пусть фотонная мода в начальный момент времени задана оператором плотности $\hat{\rho}_f^0$, а молекула $\hat{\rho}_m^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Sp} \{ \hat{U}_1 \hat{U}_2 (\hat{\rho}_f^0 \otimes \hat{\rho}_m^0) \hat{U}_2^+ \hat{U}_1^+ \} = \\ = e^{-i\omega_0 t \hat{a}^+ \hat{a}} \left[\cos t \lambda \sqrt{\hat{a} \hat{a}^+} \hat{\rho}_f^0 \cos(t \lambda \sqrt{\hat{a} \hat{a}^+}) + \right. \\ \left. + \hat{a}^+ \frac{\sin t \lambda \sqrt{\hat{a} \hat{a}^+}}{\sqrt{\hat{a} \hat{a}^+}} \hat{\rho}_f^0 \frac{\sin t \lambda \sqrt{\hat{a} \hat{a}^+}}{\sqrt{\hat{a} \hat{a}^+}} \hat{a} \right] e^{i\omega_0 t \hat{a}^+ \hat{a}}. \end{aligned} \quad (94)$$

Разлагая операторнозначные функции в ряд, удерживая члены до порядка $(t \lambda)^4$ и проводя усреднение по ансамблю молекул, можно получить операторное уравнение для матрицы плотности фотонной моды

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{p}_f}{dt} = & -\frac{1}{2} \mathcal{A} \left\{ \hat{a}\hat{a}^+ [\hat{p}_f - (\frac{\lambda}{\gamma})^2 (\hat{a}\hat{a}^+ \hat{p}_f + 3\hat{p}_f \hat{a}\hat{a}^+)] + \right. \\
& + [\hat{p}_f - (\frac{\lambda}{\gamma})^2 (\hat{p}_f \hat{a}\hat{a}^+ + 3\hat{a}\hat{a}^+ \hat{p}_f)] \hat{a}\hat{a}^+ - \\
& - 2\hat{a}^+ [\hat{p}_f - 2(\frac{\lambda}{\gamma})^2 (\hat{a}\hat{a}^+ \hat{p}_f + \hat{p}_f \hat{a}\hat{a}^+)] \hat{a} \left. \right\} - \\
& - \frac{1}{2} \mathcal{B} (\hat{a}^+ \hat{a} \hat{p}_f + \hat{p}_f \hat{a}^+ \hat{a}) + \mathcal{B} \hat{a} \hat{p}_f \hat{a}^+ .
\end{aligned} \quad (95)$$

Здесь $\mathcal{A} = \tau_1 2\lambda^2/\gamma^2$, $\mathcal{B} = \tau_2 2\lambda^2/\gamma_2^2$, τ_1 — скорость ввода в резонатор возбужденных молекул, γ^{-1} — среднее время жизни возбужденных молекул за счет оптического перехода между верхним и нижним состояниями, γ_2^{-1} — среднее время жизни молекулы в возбужденном состоянии за счет потерь, τ_2 — скорость ввода в резонатор "поглотителей" [15].

В представлении Глаубера-Сударшана

$$\hat{p}_f(t) = \int P(\alpha, \bar{\alpha}; t) |\alpha\rangle \langle \alpha| \frac{d\bar{\alpha} \Lambda d\alpha}{2\pi i}$$

получаем для $P(\alpha, \bar{\alpha})$ уравнение Фоккера-Планка, применявшееся ранее в теории лазера [14, 31]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial t} = & -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ [(\mathcal{A} - \mathcal{B}) - 4\mathcal{A}(\frac{\lambda}{\gamma})^2 |\alpha|^2] \alpha P - \mathcal{A} \frac{\partial P}{\partial \bar{\alpha}} \right\} - \\
& - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \left\{ [(\mathcal{A} - \mathcal{B}) - 4\mathcal{A}(\frac{\lambda}{\gamma})^2 |\alpha|^2] \bar{\alpha} P - \mathcal{A} \frac{\partial P}{\partial \alpha} \right\}.
\end{aligned} \quad (96)$$

В установившемся состоянии можно пренебречь временной производной в (96) и уравнение (96) удовлетворяется, если

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = \frac{1}{\mathcal{A}} [(\mathcal{A} - \mathcal{B}) \alpha - C |\alpha|^2 \alpha] P, \quad C = 4(\lambda/\gamma)^2 \mathcal{A}. \quad (97)$$

Из (97) получаем

$$\begin{aligned}
P(\alpha, \bar{\alpha}) = & \mathcal{N} \exp \left[\frac{\mathcal{A} - \mathcal{B}}{\mathcal{A}} \alpha \bar{\alpha} - \frac{1}{2} \frac{C}{\mathcal{A}} (\alpha \bar{\alpha})^2 \right] = \\
= & \mathcal{N} \exp (-\mathcal{F}/k_B T),
\end{aligned} \quad (98)$$

где \mathcal{N} — константа, определяемая нормировкой P , а \mathcal{F} — свободная энергия

Уравнения движения для операторов $\hat{a}, \hat{a}^+, \hat{b}_k, \hat{b}_k^+$ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{a}}{dt} &= -2i\Omega_0(t)\hat{a} + 2i\Omega_1(t)\hat{a}^+ - i\sum_k f_k \hat{b}_k, \\ \frac{d\hat{a}^+}{dt} &= 2i\Omega_0(t)\hat{a}^+ - 2i\Omega_1(t)\hat{a} + i\sum_k \bar{f}_k \hat{b}_k^+, \\ \frac{d\hat{b}_k}{dt} &= -i\omega_k \hat{b}_k - i\bar{f}_k \hat{a}, \quad \frac{d\hat{b}_k^+}{dt} = i\omega_k \hat{b}_k^+ + i f_k \hat{a}^+. \end{aligned} \quad (87)$$

Из уравнений (87) видно, что операторы \hat{a} и \hat{a}^+ перемешиваются в процессе временной эволюции, поэтому параметрический осциллятор может усиливать свои нулевые флуктуации и излучать усиленное поле [37].

Квантовый параметрический осциллятор (без учета взаимодействия с термостатом) изучался А.М.Переломовым и В.С.Поповым в работе [38] (см. также § 4, часть I и § 7 часть II и цитированную в них литературу). В этой работе было показано, что в случае периодической модуляции частоты спектр квазиэнергий осциллятора может быть трех типов. (Здесь существенно, что у линейной динамической группы осциллятора $\hat{S}_p(2, R) = \hat{S}_u(1, 1) = \hat{S}_L(2, R)$ имеется три типа однопараметрических подгрупп, с которыми может быть связан оператор сдвига системы во времени на период τ . Дискретному спектру квазиэнергий соответствуют устойчивые состояния осциллятора, а сплошному спектру $(-\infty < \varepsilon < +\infty)$ — неустойчивые состояния (зона параметрического резонанса) (см. более подробно § 5, часть II)).

В недавней работе [39] Я.И.Грановским, Ю.А.Димашко и А.С.Жедановым было установлено, что потере устойчивости соответствует фазовый переход в системе.

В этой работе термостат задавался температурой T и временем релаксации τ_{rel} .

Если $\tau/\tau_{rel} \gg 1$ ("медленный" осциллятор), то все термодинамические характеристики параметрического осциллятора успевают следовать изменению её параметров и матрица плотности имеет вид

$$\hat{\rho}(t) = \exp(-\hat{H}_0(t)/k_B T) / S_p(-H_0(t)/k_B T), \quad (88)$$

здесь $\hat{H}_0(t)$ — гамильтониан осциллятора вида (86) без учета взаимодействия с термостатом.

Поскольку

$$[4\Omega_0(t)]^2 - [4\Omega_1(t)]^2 = 4\omega^2(t) \geq 0$$

у "медленного" осциллятора фазовый переход невозможен.

При $\tau/\tau_{\text{rel}} \ll 1$ ("быстрый" осциллятор) термодинамические переменные не успевают подстраиваться под изменение частоты и должны происходить усреднение параметров параметрического осциллятора за период.

В этом случае матрица плотности равна

$$\hat{\rho} = \exp(-\hat{K}/k_B T) / \text{Sp}(-\hat{K}/k_B T), \quad (89)$$

где \hat{K} - оператор квазиэнергий (квазигамильтониан), который для осциллятора имеет вид линейной комбинации

$$\hat{K} = \tilde{\Omega}_0(\tau)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}^\dagger) - \tilde{\Omega}_1(\tau)(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a})$$

и фазовый переход здесь оказывается возможным, т.к. в общем случае величина $\xi/\tau = (4\tilde{\Omega}_0)^2 - (4\tilde{\Omega}_1)^2$ может иметь любой знак. Фазовый переход происходит в полюсе функции $\text{Sp} \exp(-\hat{K}/k_B T)$, это условие совпадает (см., например § 5, 8а части II) с условием потери устойчивости $\xi = 0$ или $|\text{Sp} \hat{h}(\tau)| = 2$ - (граница зон устойчивости и зоны резонанса). (Здесь $\hat{h}(\tau) = \hat{T}(\hat{h}(\tau))$, $\hat{h}(\tau) \in \text{SU}(1,1)$).

Задача 99. Показать, что статистическая сумма быстрого осциллятора равна

$$\text{Sp}(\exp(-\hat{K}/k_B T)) = 1/2 \text{sh}(\beta \xi / 2\tau), \quad (90)$$

$$\beta = (k_B T)^{-1},$$

а средняя величина оператора $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger$

$$\langle \hat{N} \rangle = \frac{\tilde{\Omega}_0}{2\tau\xi} \text{ch}(\beta \xi / 2\tau) \quad (91)$$

и неограниченно возрастает при $\xi \rightarrow 0$.

Указание. При вычислении статсуммы (90) учесть, что осциллятору соответствуют два унитарных представления $T_+^{1/4}$ и $T_+^{3/4}$ группы $\text{SU}(1,1)$.

Было бы интересно исследовать задачу о параметрическом возбуждении осциллятора, взаимодействующего с термостатом, с точки зрения кинетического уравнения для матрицы плотности.

10д). Уравнение Фоккера-Планка в теории лазера

Простейшая модель одномодового лазера, представляет собой квантовый осциллятор, резонансно взаимодействующий с системой двухуровневых молекул. Такая модель дается гамильтонианом [15, 31]

$$\hat{H} = \omega_0 \hat{a}^+ \hat{a} + \sum_{K=1}^N \omega \hat{\sigma}_3^{(K)} + \lambda \sum_{K=1}^N [\hat{a}^+ \hat{\sigma}_-^{(K)} + \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(K)}], \quad (92)$$

где $\hat{\sigma}_\pm^{(K)}$, $\hat{\sigma}_3^{(K)}$ - матрицы Паули, отвечающие K -ой молекуле. Предполагается, что все молекулы неподвижны, находятся в одинаковых условиях и константа взаимодействия $\lambda = d\sqrt{\omega_0/2V}$ не зависит от координаты молекул (d - дипольный момент перехода, V - объем системы). Рассмотрим случай точного резонанса $\omega = \omega_0$.

Задача 100. Показать, что при $N=1$ оператор эволюции, соответствующий гамильтониану (92), равен

$$\hat{U}(t) = \hat{U}_1(t) \hat{U}_2(t), \quad (93)$$

где

$$\hat{U}_1(t) = e^{-i\omega_0 t \hat{a}^+ \hat{a}} \begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega_0 t/2} \end{pmatrix},$$

$$\hat{U}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \lambda \sqrt{\hat{a} \hat{a}^+} & -i \frac{\sin t \lambda \sqrt{\hat{a} \hat{a}^+}}{\sqrt{\hat{a} \hat{a}^+}} \hat{a} \\ -i \hat{a}^+ \frac{\sin t \lambda \sqrt{\hat{a} \hat{a}^+}}{\sqrt{\hat{a} \hat{a}^+}} & \cos t \lambda \sqrt{\hat{a} \hat{a}^+} \end{pmatrix} \hat{a}$$

Пусть фотонная мода в начальный момент времени задана оператором плотности $\hat{\rho}_f^0$, а молекула $\hat{\rho}_m^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$S_P \{ \hat{U}_1 \hat{U}_2 \begin{pmatrix} \hat{\rho}_f^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{U}_2^+ \hat{U}_1^+ \} =$$

$$= e^{-i\omega_0 t \hat{a}^+ \hat{a}} \left[\cos t \lambda \sqrt{\hat{a} \hat{a}^+} \hat{\rho}_f^0 \cos(t \lambda \sqrt{\hat{a} \hat{a}^+}) + \right. \quad (94)$$

$$\left. + \hat{a}^+ \frac{\sin t \lambda \sqrt{\hat{a} \hat{a}^+}}{\sqrt{\hat{a} \hat{a}^+}} \hat{\rho}_f^0 \frac{\sin t \lambda \sqrt{\hat{a} \hat{a}^+}}{\sqrt{\hat{a} \hat{a}^+}} \hat{a} \right] e^{i\omega_0 t \hat{a}^+ \hat{a}}$$

Разлагая операторнозначные функции в ряд, удерживая члены до порядка $(t\lambda)^4$ и проводя усреднение по ансамблю молекул, можно получить операторное уравнение для матрицы плотности фотонной моды

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{p}_f}{dt} = & -\frac{1}{2} \mathcal{A} \left\{ \hat{a} \hat{a}^+ \left[\hat{p}_f - \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^2 (\hat{a} \hat{a}^+ \hat{p}_f + 3 \hat{p}_f \hat{a} \hat{a}^+) \right] + \right. \\
& + \left[\hat{p}_f - \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^2 (\hat{p}_f \hat{a} \hat{a}^+ + 3 \hat{a} \hat{a}^+ \hat{p}_f) \right] \hat{a} \hat{a}^+ - \\
& - 2 \hat{a}^+ \left[\hat{p}_f - 2 \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^2 (\hat{a} \hat{a}^+ \hat{p}_f + \hat{p}_f \hat{a} \hat{a}^+) \right] \hat{a} \left. \right\} - \\
& - \frac{1}{2} \mathcal{B} (\hat{a}^+ \hat{a} \hat{p}_f + \hat{p}_f \hat{a}^+ \hat{a}) + \mathcal{B} \hat{a} \hat{p}_f \hat{a}^+.
\end{aligned} \quad (95)$$

Здесь $\mathcal{A} = \tau_1 2\lambda^2/\gamma^2$, $\mathcal{B} = \tau_2 2\lambda^2/\gamma_2^2$, τ_1 — скорость ввода в резонатор возбужденных молекул, γ^{-1} — среднее время жизни возбужденных молекул за счет оптического перехода между верхним и нижним состояниями, γ_2^{-1} — среднее время жизни молекулы в возбужденном состоянии за счет потерь, τ_2 — скорость ввода в резонатор "поглотителей" [15].

В представлении Глаубера-Сударшана

$$\hat{p}_f(t) = \int P(\alpha, \bar{\alpha}; t) |\alpha\rangle \langle \alpha| \frac{d\bar{\alpha} \Lambda d\alpha}{2\pi i}$$

получаем для $P(\alpha, \bar{\alpha})$ уравнение Фоккера-Планка, применявшееся ранее в теории лазера [14, 31]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial t} = & -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \left[(\mathcal{A} - \mathcal{B}) + 4\mathcal{A} \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^2 |\alpha|^2 \right] \alpha P - \mathcal{A} \frac{\partial P}{\partial \bar{\alpha}} \right\} - \\
& - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \left\{ \left[(\mathcal{A} - \mathcal{B}) - 4\mathcal{A} \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^2 |\alpha|^2 \right] \bar{\alpha} P - \mathcal{A} \frac{\partial P}{\partial \alpha} \right\}.
\end{aligned} \quad (96)$$

В установившемся состоянии можно пренебречь временной производной в (96) и уравнение (96) удовлетворяется, если

$$\frac{\partial P}{\partial \bar{\alpha}} = \frac{1}{\mathcal{A}} \left[(\mathcal{A} - \mathcal{B}) \alpha - C |\alpha|^2 \alpha \right] P, \quad C = 4(\lambda/\gamma)^2 \mathcal{A}. \quad (97)$$

Из (97) получаем

$$\begin{aligned}
P(\alpha, \bar{\alpha}) = & \mathcal{N} \exp \left[\frac{\mathcal{A} - \mathcal{B}}{\mathcal{A}} \alpha \bar{\alpha} - \frac{1}{2} \frac{C}{\mathcal{A}} (\alpha \bar{\alpha})^2 \right] = \\
= & \mathcal{N} \exp \left(-\mathcal{F}/k_B T \right),
\end{aligned} \quad (98)$$

где \mathcal{N} — константа, определяемая нормировкой P , а \mathcal{F} — свободная энергия

$$\mathcal{F} = -k_B T \frac{A-B}{\mathcal{A}} |\alpha|^2 + \frac{1}{2} k_B T \frac{C}{\mathcal{A}} |\alpha|^4 \quad (99)$$

Подобное выражение для свободной энергии использовалось Л.Д.Ландау в теории фазовых переходов второго рода, причем тогда необходимо, чтобы $A-B \sim T_c - T$ (T_c - критическая температура). Аналогия между фазовыми переходами второго рода и лазерами исследовалась Хакеном [31].

Для решения (98) имеем три области:

I. $\mathcal{A} < B$ (подпороговая область). Здесь членом пропорциональным $B |\alpha|^4$ в свободной энергии можно пренебречь, поэтому

$$P_I(\alpha, \bar{\alpha}) = \mathcal{N}_I \exp[-(B-\mathcal{A}) n / \mathcal{A}], \quad n = |\alpha|^2 \quad (100)$$

а $\mathcal{N}_I = (B-\mathcal{A}) / \pi \mathcal{A}$,

если учесть, что условие нормировки

$$\int P_I \frac{d\bar{\alpha} \wedge d\alpha}{2i} = 1.$$

Для среднего числа фотонов в области I получаем

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= Sp(\hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{\rho}_f) = \int \frac{d\bar{\alpha} \wedge d\alpha}{2i} |\alpha|^2 P_I(\alpha, \bar{\alpha}) = \\ &= \pi \int_0^\infty dn n P_I(n) = \mathcal{A} / (B-\mathcal{A}). \end{aligned} \quad (101)$$

Формула (101) определяет распределение фотонов ниже порога генерации

$$P_I(n) = \frac{1}{\pi \langle n \rangle} \exp(-n / \langle n \rangle), \quad (102)$$

которое соответствует распределению Планка для излучения абсолютно черного тела.

II. $\mathcal{A} = B$. (порог генерации)

$$P_{II}(\alpha) = \mathcal{N}_{II} \exp\left(-\frac{1}{2} C n^2 / \mathcal{A}\right), \quad \mathcal{N}_{II} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2C'}{\pi \mathcal{A}}}. \quad (103)$$

Формула (103) является распределением Гаусса. Среднее от квадрата числа фотонов

$$\begin{aligned} \langle n^2 \rangle &= Sp[(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 \hat{\rho}_f] = \\ &= \sqrt{\frac{2C'}{\pi \mathcal{A}}} \int_0^\infty (n^2 + n) \exp\left[-\frac{1}{2} C n^2 / \mathcal{A}\right] dn = \frac{\mathcal{A}}{C} \left(1 + \sqrt{\frac{C}{2\pi \mathcal{A}}}\right). \end{aligned} \quad (104)$$

Второе слагаемое в (I04) обычно является малой поправкой и, если им пренебречь, то получаем распределение Гаусса

$$P_{II}(n) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\langle n^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{1}{2} n^2 / \langle n^2 \rangle\right). \quad (I05)$$

III. $\mathcal{A} > C$ (область над порогом генерации)

В этой области

$$\langle n \rangle = (\mathcal{A} - B) / C. \quad (I06)$$

Линеаризуя выражение (99) в окрестности этой точки, получим

$$n \equiv |\alpha|^2 = \langle n \rangle + \delta n, \\ (\mathcal{A} - B)n - \frac{1}{2} C n^2 = (\mathcal{A} - B)\langle n \rangle - \frac{1}{2} C \delta n^2.$$

Поэтому находим, что

$$P_{III}(n) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{C}{2\pi\mathcal{A}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{C}{\mathcal{A}} (n - \langle n \rangle)^2\right\} \quad (I07)$$

Среднее квадратичное отклонение переменной n для распределения (I07)

$$\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = \pi \int_0^\infty (n - \langle n \rangle)^2 P_{III}(n) dn + \langle n \rangle = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A} - B} \langle n \rangle. \quad (I08)$$

Если $\mathcal{A} \gg B$, то $\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle \approx \langle n \rangle$.

В этом случае распределение (I07) становится очень узким и может быть приближено δ -функцией

$$P_{III}(n) = \mathcal{N} \delta(n - \langle n \rangle) \quad (I09)$$

и из представления Глаубера-Сударшана следует, что лазерная мода находится в когерентном состоянии

$$\hat{\rho}_f = |\sqrt{\langle n \rangle}\rangle \langle \sqrt{\langle n \rangle}|. \quad (II0)$$

Из решений (I02), (I07) и (I09) видно, что переход из подпороговой области I (слабая накачка, лазер является обычным тепловым источником света) в область над порогом генерации (сильная накачка, излучение лазера обладает резко выраженной когерентностью) аналогичен переходу из неупорядоченной термодинамической фазы в упорядоченную в случае фазовых переходов. Появление когерентного состояния (формула (II0)) в случае лазера с сильной накачкой сопровождается спонтанным нарушением симметрии относительно

калибровочных преобразований. В области I фаза поля неопределена и состояние лазера инвариантно относительно калибровочного преобразования, изменяющего фазу. В области 3 из-за появления когерентного состояния фаза поля становится наблюдаемой и состояние лазера не инвариантно относительно калибровочных преобразований. При этом распределение (109) согласуется также с тем хорошо известным фактом, что упорядоченная термодинамическая фаза может быть описана некоторым макроскопическим (классическим) параметром. Нарушенная симметрия восстанавливается флуктуациями фазы, которые приводят к конечной ширине линии излучения лазера.

Аналогичная теория для лазера с непрерывным набором мод была сформулирована в работе [40] (см. также обзор Хакена [41]).

В заключении отметим, что последовательная квантовая теория лазера была развита в работах Казанцева и Сурдутовича [42], в основе которой лежит изучение боголюбовской цепочки кинетических уравнений для первых основных функций распределения.

10e). Релаксация спиновых систем и модель Дике

Рассмотрим вначале нейтральную частицу со спином j и магнитным моментом μ_0 , находящуюся во внешнем однородном магнитном поле \vec{B} . Хорошо известно (см. § 6а, часть II), что такая система имеет $2j+1$ эквидистантных уровней $E_m = \hbar \omega_m$, $\omega = (\mu_0/\hbar)|\vec{B}|$ и группа $SU(2)$ является её линейной динамической группой.

Эволюция такой системы, находящейся в контакте с термостатом при температуре T , описывается уравнением вида (11), где

$$\hat{A}_+ = \hat{J}_+, \quad \hat{A}_- = \hat{J}_-, \\ [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_z, \quad [\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] = \pm \hat{J}_\pm$$

\hat{J}_z, \hat{J}_\pm — генераторы группы $SU(2)$.

Уравнение для матрицы плотности спиновой подсистемы удобно записать в виде

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\gamma (\hat{J}_+ \hat{J}_- \hat{\rho} - 2\hat{J}_- \hat{\rho} \hat{J}_+ + \hat{\rho} \hat{J}_+ \hat{J}_-) + \\ -\delta (\hat{J}_- \hat{J}_+ \hat{\rho} - 2\hat{J}_+ \hat{\rho} \hat{J}_- + \hat{\rho} \hat{J}_- \hat{J}_+), \quad (111)$$

где $\gamma = \frac{\gamma}{2} (\langle \nu \rangle + 1)$, $\delta = \frac{\gamma}{2} \langle \nu \rangle$

Такое уравнение было получено в работе [II]. В работах [I6-2I] (см. также обзор А.М.Переломова [I3]) при исследовании этого уравнения было использовано диагональное представление матрицы плотности по спиновым когерентным состояниям $|\theta, \varphi\rangle$, которые задаются точкой сферы единичного радиуса.

В отличие от работ [I6-2I] будем пользоваться спиновыми когерентными состояниями, заданными точкой комплексной плоскости z , а именно

$$|z\rangle = (1 + z\bar{z})^{-j} \exp(z\hat{J}_+) |0\rangle, \quad |0\rangle \equiv |j, -j\rangle \quad (II2)$$

Обе эти параметризации связаны стереографическим отображением $z = \tan \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}$ и, следовательно, эквивалентны.

Однако, параметризация (II2) более удобна в том отношении, что связанные с ней комплексные переменные z и \bar{z} (в отличие от θ и φ) симметрично входят в уравнение Фоккера-Планка (см. далее). Это позволяет более отчетливо увидеть аналогию со случаем релаксации осциллятора. Для уравнения Фоккера-Планка в переменных z и \bar{z} проще отыскивать обратный оператор \hat{E} в методе квазиравновесной функции распределения.

Итак, представим матрицу плотности в диагональном виде

$$\hat{\rho}(t) = \int d\mu(z) \hat{P}(z, t) |z\rangle \langle z|, \quad (II3)$$

где $d\mu(z) = \frac{2j+1}{2\pi i} \frac{d\bar{z} \wedge dz}{(1 + z\bar{z})^2}$ - инвариантная мера на комплексной плоскости (относительно действия динамической группы $SU(2)$).

Для вывода уравнения, которому подчиняется контравариантный символ $P(z, t)$, необходимо найти действие операторов \hat{J}_\pm на "проекторы" $|z\rangle \langle z|$.

Используя формулу (II2), находим, что

$$\begin{aligned} \hat{J}_+ |z\rangle \langle z| &= (1 + z\bar{z})^{-2j} \hat{J}_+ \exp(z\hat{J}_+) |0\rangle \langle 0| \exp \bar{z} \hat{J}_- = \\ &= (1 + z\bar{z})^{-2j} \frac{\partial}{\partial z} \exp z \hat{J}_+ |0\rangle \langle 0| \exp \bar{z} \hat{J}_- = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{2j\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \right) |z\rangle \langle z|, \end{aligned} \quad (II4)$$

$$\begin{aligned}\hat{J}_- |z\rangle\langle z| &= (1+z\bar{z})^{-2j} \hat{J}_- e^{z\hat{J}_+} |0\rangle\langle 0| e^{\bar{z}\hat{J}_-} = \\ &= (1+z\bar{z})^{-2j} e^{z\hat{J}_+} (\hat{J}_- - 2z\hat{J}_3 - z^2\hat{J}_+) |0\rangle\langle 0| e^{\bar{z}\hat{J}_-} = \\ &= \left(-z^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{2jz}{1+z\bar{z}}\right) |z\rangle\langle z|,\end{aligned}\quad (II5)$$

$$\begin{aligned}\hat{J}_3 |z\rangle\langle z| &= (1+z\bar{z})^{-2j} e^{z\hat{J}_+} (\hat{J}_3 + z\hat{J}_+) |0\rangle\langle 0| e^{\bar{z}\hat{J}_-} = \\ &= \left(z \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - j \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right) |z\rangle\langle z|.\end{aligned}\quad (II6)$$

Учитывая свойство эрмитовости проектора $|z\rangle\langle z|$, легко получить из (II4)–(II6) следующие равенства

$$|z\rangle\langle z| \hat{J}_+ = \left(-\bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{2j\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right) |z\rangle\langle z|,\quad (II7)$$

$$|z\rangle\langle z| \hat{J}_- = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{2jz}{1+z\bar{z}}\right) |z\rangle\langle z|,\quad (II8)$$

$$|z\rangle\langle z| \hat{J}_3 = \left(\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - j \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right) |z\rangle\langle z|.\quad (II9)$$

Задача I01. Подставив (II3) в (III) и используя формулы (II4–II9), проверить, что функция $f(z, t) = P(z, t)/(1+z\bar{z})^2$ удовлетворяет уравнению Фоккера-Планда

$$\begin{aligned}\partial f / \partial t &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \{ 2[\eta(j+1) - \delta j + \eta \bar{z} z] z + (\eta + \delta) z^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \\ &+ [\eta z^2 \bar{z}^2 + \delta] \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \} f + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \{ z \leftrightarrow \bar{z} \} f \equiv \hat{L}f.\end{aligned}\quad (I20)$$

Указание: Учесть (как и при выводе уравнения (60) граничное условие $P(z, t)/(1+z\bar{z})^2 \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$

Если в (I20) выполнить замену переменных $z = e^{-i\varphi} \operatorname{tg} \theta/2$, $\bar{z} = e^{i\varphi} \operatorname{tg} \theta/2$, то получается уравнение, полностью совпадающее с введенным в работе [19] (см. также [7], гл.8 и [13]).

Обсудим, далее, методы отыскания решений уравнения (I20).

В [17–20] предложен подход, использующий разложение по сферическим функциям $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, которые образуют полную и ортонормированную систему функций на единичной сфере S_2 .

В переменных z, \bar{z} сферические функции подчиняются уравне-

$$[(1+z\bar{z})^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \ell(\ell+1)] Y_{\ell m}(z, \bar{z}) = 0,$$

$$(z \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial \bar{z}}) Y_{\ell m}(z, \bar{z}) = m Y_{\ell m}(z, \bar{z}) \quad (I2I)$$

Здесь $(1+z\bar{z})^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ - оператор Лапласа-Бельтрами на сфере $S_2 \approx \bar{C}$ (см. например [43]).

Решение уравнений (II9), (I20) естественно искать в виде $Y_{\ell m}(z, \bar{z}) = R(|z|^2) (\bar{z}/z)^{m/2}$, причем уравнение для $R(|z|^2)$ приводится к гипергеометрическому уравнению.

В результате сферическая функция выражается в следующей форме

$$Y_{\ell m}(z, \bar{z}) = N_{\ell m} (\bar{z}/z)^{m/2} \frac{(z\bar{z})^{|\ell|/2}}{(1+z\bar{z})^\ell} {}_2F_1(-\ell+|\ell|, -\ell; |\ell|+1; -z\bar{z}), \quad (I22)$$

где нормировочная постоянная $N_{\ell m}$ определяется из условия

$$\int \frac{d(\operatorname{Re} z) d(\operatorname{Im} z)}{(1+z\bar{z})^2} Y_{\ell m}(z, \bar{z}) \bar{Y}_{\ell' m'}(z, \bar{z}) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'},$$

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma \cdot 1!} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1) 2!} x^2 + \dots$$

- гипергеометрическая функция.

Другие (эквивалентные) выражения для сферической функции можно получить из (I2I), воспользовавшись формулами Куммера для гипергеометрической функции.

Из (I2I), получаем, например, что

$$\begin{aligned} Y_{00}(z, \bar{z}) &= \sqrt{\frac{1}{\pi}} \\ Y_{11}(z, \bar{z}) &= -\sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}}, \quad Y_{10}(z, \bar{z}) = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}, \quad Y_{1-1}(z, \bar{z}) = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{z}{1+z\bar{z}}, \\ Y_{22}(z, \bar{z}) &= \sqrt{\frac{30}{\pi}} \frac{\bar{z}^2}{(1+z\bar{z})^2}, \quad Y_{21}(z, \bar{z}) = -\sqrt{\frac{30}{\pi}} \frac{\bar{z}(1-z\bar{z})}{(1+z\bar{z})^2}, \\ Y_{20}(z, \bar{z}) &= \sqrt{\frac{5}{\pi}} \frac{1-4z\bar{z}+z^2\bar{z}^2}{(1+z\bar{z})^2}, \\ Y_{2-1}(z, \bar{z}) &= \sqrt{\frac{30}{\pi}} \frac{z(1-z\bar{z})}{(1+z\bar{z})^2}, \quad Y_{2-2}(z, \bar{z}) = \sqrt{\frac{30}{\pi}} \frac{z^2}{(1+z\bar{z})^2} \end{aligned} \quad (I22a)$$

Явные формулы для этих сферических функций нам понадобятся в дальнейшем.

Вначале кратко обсудим, следуя [13, 24], задачу отыскания явного вида контрвариантного символа оператора \hat{F} , действующего в неприводимом представлении \mathcal{D}^j группы $SU(2)$.

Пусть оператор \hat{F} задан диагональным представлением по спиновым когерентным состояниям, то есть

$$\hat{F} = \int d\mu(z) P_F(z, \bar{z}) |z\rangle\langle z| \quad (123)$$

Функцию $P_F(z, \bar{z})$ разложим в ряд по сферическим функциям

$$P_F(z, \bar{z}) = \sum_{\ell m} C_{\ell m} Y_{\ell m}(z, \bar{z}). \quad (124)$$

Тогда нахождение $P_F(z, \bar{z})$ сводится к отысканию коэффициентов $C_{\ell m}$. Рассмотрим оператор вида

$$\hat{P}_{\ell m} = \int d\mu(z) Y_{\ell m}(z, \bar{z}) |z\rangle\langle z|. \quad (125)$$

Разлагая в (125) когерентные состояния по векторам $|j, \mu\rangle$ собственным для операторов \hat{J}^2, \hat{J}_3 , получаем

$$\hat{P}_{\ell m} = \sum_{\mu, \mu'} |j, \mu\rangle A_{\mu\mu'}^{\ell m} \langle j, \mu'|, \quad (126)$$

где $A_{\mu\mu'}^{\ell m} = \left\{ (2j)! / [(j+\mu)!(j-\mu)!(j+\mu')!(j-\mu')!] \right\}^{1/2} \cdot$

$$\cdot \int d\mu(z) \frac{z^{j+\mu} \bar{z}^{j+\mu'}}{(1+z\bar{z})^{2j}} Y_{\ell m}(z, \bar{z}) \quad (127)$$

Интеграл в (127) выражается через произведение двух коэффициентов Клебша-Гордона и его вычисление дает [44]

$$A_{\mu\mu'}^{\ell m} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{\pi}} \langle j, \mu; \ell, m | j, \mu' \rangle \langle j, -j; \ell, 0 | j, -j \rangle \quad (128)$$

Последний коэффициент Клебша-Гордона в явном виде равен

$$\langle j, -j; \ell, 0 | j, -j \rangle = [(2j+1)!(2j)! / (2j+\ell+1)!(2j-\ell)!]^{1/2}.$$

поэтому $A_{j\mu\mu'}^{jem} \equiv 0$, если $\ell > 2j$ и в формуле (I24) суммирование проводится по ℓ от 0 до $2j$.

Вернемся к задаче отыскания решений уравнения Фоккера-Планка (I20), описывающего релаксацию спина j . Будем искать функцию $f(z, \bar{z}, t)$ в виде разложения по сферическим функциям

$$f(z, \bar{z}, t) = \sum_{\ell=0}^{2j} \sum_{m=-\ell}^{\ell} F_{\ell m}(t) Y_{\ell m}(z, \bar{z}) (1+z\bar{z})^{-2} \quad (I29)$$

Подставив (I29) и (I20) и воспользовавшись ортонормированностью функций $Y_{\ell m}(z, \bar{z})$, получаем, что коэффициенты $F_{\ell m}(t)$ удовлетворяют линейной системе зацепленных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{F}_{\ell m}(t) = \sum_{\ell'=0}^{2j} \sum_{m'=-\ell'}^{\ell'} L_{\ell m \ell' m'}^{\ell} F_{\ell' m'}(t), \quad (I30)$$

где

$$L_{\ell m \ell' m'}^{\ell} = \int_C d(Re z) d(Im z) \bar{Y}_{\ell m}(z, \bar{z}) \hat{L} \frac{Y_{\ell' m'}(z, \bar{z})}{(1+z\bar{z})^2}$$

- матричные элементы оператора \hat{L} из правой части уравнения (I20).

Если j невелико, то решения системы (I30) можно легко найти, воспользовавшись хорошо известными методами [45].

При этом, постоянные интегрирования должны определяться из начального условия

$$f(z, \bar{z}, t=0) = \frac{P(z, \bar{z}, 0)}{(1+z\bar{z})^2}, \quad (I31)$$

где $P(z, \bar{z}, 0)$ - контрвариантный символ начальной матрицы плотности $\hat{\rho}(t=0)$. Из (I29) и (I31) получаем, что

$$F_{\ell m}(0) = \int \frac{dRe z dIm z}{(1+z\bar{z})^2} P(z, \bar{z}, 0) \bar{Y}_{\ell m}(z, \bar{z}) = C_{\ell m}. \quad (I32)$$

Здесь

$$P(z, \bar{z}; 0) = \sum_{\ell, m} C_{\ell m} Y_{\ell m}(z, \bar{z})$$

Таким образом, в рамках данного метода задача сводится к отысканию контрвариантного символа начальной матрицы плотности.

Если при $t=0$ спиновая система находилась в чистом когерентном состоянии $|z_0\rangle$, т.е. $\hat{\rho}(0) = |z_0\rangle\langle z_0|$, то формулы (I29)-(I32) позволяют найти пропагатор уравнения Фоккера-Планка (I20). В самом деле, в этом случае

$$P(z, \bar{z}, t=0) = \delta^{(2)}(z - z_0), \quad (I33)$$

то есть начальное распределение задано δ -функцией, для которой справедливо соотношение

$$\oint_C \frac{d\text{Re}z \cdot d\text{Im}z}{(1 + z\bar{z})^2} \delta^{(2)}(z - z_0) \psi(z, \bar{z}) = \psi(z_0, \bar{z}_0)$$

Поэтому, для пропагатора $K(z, \bar{z}, t | z_0, \bar{z}_0, 0)$ получаем

$$K(z, \bar{z}, t | z_0, \bar{z}_0, 0) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} F_{\ell m}(t) Y_{\ell m}(z, \bar{z}), \quad (I34)$$

где начальные коэффициенты $F_{\ell m}(0)$ имеют вид

$$F_{\ell m}(0) = C_{\ell m} \bar{Y}_{\ell m}(z_0, \bar{z}_0).$$

Задача I02. Показать, что в случае двухуровневой системы (спин $j=1/2$) (I30) является системой четырех уравнений

$$\begin{aligned} \dot{F}_{00} &= 0, \\ \dot{F}_{10} &= 2\sqrt{3}(\eta - \delta) F_{00} - 2(\eta + \delta) F_{10}, \\ \dot{F}_{1-1} &= -(\eta + \delta) F_{1-1}, \\ \dot{F}_{11} &= -(\eta + \delta) F_{11}, \end{aligned} \quad (I35)$$

с решениями вида

$$\begin{aligned} F_{00}(t) &= F_{00}(0), \\ F_{10}(t) &= F_{10}(0) e^{-2(\eta + \delta)t} + \frac{\sqrt{3}(\eta - \delta)}{\eta + \delta} F_{00}(0) [1 - e^{-2(\eta + \delta)t}], \\ F_{1\pm 1}(t) &= F_{1\pm 1}(0) e^{-(\eta + \delta)t} \end{aligned} \quad (I36)$$

и проверить, что функция

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(z, \bar{z}, t | z_0, \bar{z}_0, 0) = & \frac{1}{\pi} + \frac{3}{\pi} Y_{11}(z, \bar{z}) \bar{Y}_{11}(z_0, \bar{z}_0) e^{-(\eta+\delta)t} + \\ & + \frac{3}{\pi} Y_{10}(z, \bar{z}) \left[\bar{Y}_{10}(z_0, \bar{z}_0) e^{-2(\eta+\delta)t} + \frac{\eta-\delta}{\eta+\delta} Y_{00}(z_0, \bar{z}_0) (1 - e^{-2(\eta+\delta)t}) \right] \\ & + \frac{3}{\pi} Y_{1,-1}(z, \bar{z}) \bar{Y}_{1,-1}(z_0, \bar{z}_0) e^{-(\eta+\delta)t} \end{aligned} \quad (I37)$$

— пропагатор соответствующего уравнения Фоккера-Планка.

Заметим, что в формулах (I36) исправлена ошибка, допущенная в работе [20].

Задача I03. Проверить, что в пределе при $t \rightarrow +\infty$ (I37) переходит в контравариантный символ P матрицы плотности двухуровневой системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия с термостатом, имеющим температуру T . Символ P с использованием угловой параметризации равен [I3]

$$P_{\frac{1}{2}}(\vec{n}) = \cosh \frac{\beta}{2} + 3 \sinh \frac{\beta}{2} \cos \theta, \quad \beta = \frac{\Delta E}{kT}$$

Если начальная матрица плотности произвольна и ей отвечает контравариантный символ $P_0(z, \bar{z})$, то решение уравнения (I20)

$$f(z, \bar{z}, t) = P(z, \bar{z}, t) / (1 + z \bar{z})^2,$$

$$P(z, \bar{z}, t) = \int dR_z dIm z. K(z, \bar{z}, t | z_0, \bar{z}_0, 0) P_0(z_0, \bar{z}_0). \quad (I38)$$

При этом, изменение во времени вероятности нахождения спина в состоянии с фиксированной проекцией дается формулой

$$W_m^j(t) = \langle j, m | \hat{\rho}(t) | j, m \rangle = \int d\mu(z) P(z, \bar{z}, t) |\langle z | j, m \rangle|^2 \quad (I39)$$

Задача I04. Вычислить вероятность нахождения спина $1/2$ в состоянии $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, если в начальный момент времени (до приведения в контакт с термостатом) он находился в состоянии $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$

Ответ: $W_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\eta-\delta}{\eta+\delta} \right) (1 - e^{-2(\eta+\delta)t})$

Задача I05. Рассмотреть релаксацию трехуровневой эквидистантной системы ($j=1$) и показать, что в этом случае (I30) сводится к системе из девяти уравнений [46]

$$\dot{F}_{00} = 0$$

$$\dot{F}_{10} = \frac{8}{\sqrt{3}} (\eta - \delta) F_{00} - 2(\eta + \delta) F_{10} - \frac{2}{\sqrt{15}} (\eta - \delta) F_{20},$$

$$\dot{F}_{20} = 2\sqrt{15} (\eta - \delta) F_{10} - 6(\eta + \delta) F_{20},$$

$$\dot{F}_{1-1} = -(\eta + \delta) F_{1-1} - \frac{1}{\sqrt{3}} (\eta - \delta) F_{2-1},$$

$$\dot{F}_{2-1} = 3\sqrt{5} (\eta - \delta) F_{1-1} - 5(\eta + \delta) F_{2-1}, \quad (I40)$$

$$\dot{F}_{11} = (\eta + \delta) F_{11} + \frac{1}{\sqrt{3}} (\eta - \delta) F_{21},$$

$$\dot{F}_{21} = 3\sqrt{5} (\eta - \delta) F_{11} - 5(\eta + \delta) F_{21},$$

$$\dot{F}_{2-2} = -2(\eta + \delta) F_{2-2},$$

$$\dot{F}_{22} = -2(\eta + \delta) F_{22}.$$

Найти пропагатор соответствующего уравнения Фоккера-Планка и вычислить вероятность нахождения спина в состоянии $|1,1\rangle$, если при $t=0$ он находился в состоянии $|1,-1\rangle$.

Видно, что с ростом j число уравнений для коэффициентов $F_{jm}(t)$ резко увеличивается и этот метод нахождения решений перестает быть эффективным.

Интересно, что уравнение (III) помимо релаксации спина в магнитном поле описывает также релаксацию в системе N одинаковых двухуровневых молекул, которые находятся в области с линейными размерами, много меньшими длины волны λ резонансного перехода между уровнями (задача Дике).

Р.Дике еще в 1954 году показал, что при этих условиях может возникнуть спонтанное кооперативное излучение (сверхизлучение), появляющееся за счет согласования фаз молекулярных излучателей, которые обычно рассогласованы. В результате этого интенсивность сверхизлучения пропорциональна квадрату числа молекул. Если расстояние между молекулами $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| \ll \lambda$ и если пренебречь поперечной релаксацией, то полный энергетический опин \mathcal{I} (см. § 6 в часть II и лит. литер.) сохраняется в процессе релаксации. Другими словами, состояния с разными \mathcal{I} распадаются независимо, каждое со своим характерным временем.

Обсудим, следуя главным образом работе [II], форму контура излучения ансамбля двухуровневых молекул (при температуре термостата $T = 0$, поэтому в (III) $\langle \nu \rangle = \delta = 0$, $\eta = \delta/2$).

Из гамильтониана (10) взаимодействия эквидистантной системы со спином \mathcal{J} с осцилляторами поля (термостатом) следует уравнение движения для операторов поля

$$\hat{B}_k = -i\omega_k \hat{B}_k - if_k \mathcal{J}_-, \quad (141)$$

решение которого можно записать в виде

$$\hat{B}_k(t) = e^{-i\omega_k t} \hat{B}_k(0) - if_k \int_0^t \hat{\mathcal{J}}_-(t') e^{-i\omega_k(t-t')} dt' \quad (142)$$

Здесь и далее $\hat{\mathcal{J}}_3, \hat{\mathcal{J}}_+, \hat{\mathcal{J}}_-$ — операторы энергетического спина.

Пусть при $t=0$ электромагнитное поле находилось в вакуумном состоянии. Тогда среднее число квантов в k -ой моде в момент времени t_0

$$\langle n_k(t_0) \rangle = \langle \hat{B}_k^\dagger(t_0) \hat{B}_k(t_0) \rangle = |f_k|^2 \int_0^{t_0} \int_0^{t_0} dt' dt'' e^{-i\omega_k(t'-t'')} \langle \hat{\mathcal{J}}_+(t') \hat{\mathcal{J}}_-(t'') \rangle \quad (143)$$

При $t_0 \rightarrow \infty$ получаем формулу для спектральной плотности

$$g(\omega) = \text{Re} \int_0^\infty dt \int_0^\infty d\tau e^{-i\omega\tau} \langle \hat{\mathcal{J}}_+(t+\tau) \hat{\mathcal{J}}_-(t) \rangle. \quad (144)$$

Корреляционная функция $\langle \hat{\mathcal{J}}_+(t+\tau) \hat{\mathcal{J}}_-(t) \rangle$ определяется кинетическим уравнением (III).

Задача 106. Пусть при $t=0$ система находилась в состоянии с фиксированной проекцией энергетического спина M , т.е. $\hat{\mathcal{J}}^z(0) = |J, M\rangle \langle J, M|$. Показать, что в этом случае нормированная спектральная плотность излучения $g_M^J(\omega)$ равна [II, 5]

$$g_M^J(\omega) = \frac{J\gamma}{\pi(J+M)} \sum_{m=-J}^{M-1} \sum_{m'=-J}^m \frac{(J+m)!(J-m')!}{(J-m)!(J+m')!} \cdot \text{Re} \left[\prod_{n=m'}^m 1 / [J(J+1) - n^2 + i(\omega - \omega_0)/\gamma] \right]. \quad (145)$$

Здесь $\omega_0 = \Delta E/\hbar$, γ — константа затухания в уравнении (III),

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_M^J(\omega) d\omega = 1$$

Указание: При получении (145) можно действовать аналогично выводу формулы (85) для контура излучения осциллятора из § 10в, записав уравнения движения для операторов $\hat{\mathcal{J}}_3, \hat{\mathcal{J}}_+, \hat{\mathcal{J}}_-$ и полевых операторов $\hat{B}_k, \hat{B}_k^\dagger$, следующих из полного гамильтониана молекула

+ поле" (см. также [47]).

Если $M = -J+1$, то излучается только один квант и форма линии является лоренцовой

$$g_{-J+1}^J(\omega) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{1 + (\omega - \omega_0)^2 / J^2 \gamma^2},$$

причем ширина линии в J раз превосходит ширину γ излучения одной молекулы. При $M \gg -J+2$ возникает интерференция квантов, излучаемых при каскадных переходах между эквидистантными уровнями, из-за чего форма линии перестает быть лоренцовой.

В предельном случае $J \gg 1$ формулу (I45) можно записать в виде [II]

$$g_{kl}(\nu, x_0) = \frac{\gamma(1-x_0)}{2\pi} \left| \int_0^\infty \frac{e^{i\nu\tau}}{d\tau - x_0 \sinh \tau} d\tau \right|^2,$$

$$x_0 = \frac{M}{J}, \quad \nu = \frac{\Delta\omega}{J\gamma}.$$

Именно к этой формуле приводит расчет по полуклассической теории [5]. Если в качестве меры ширины линии взять величину Δ

$$\Delta(x_0) = \frac{\gamma}{\pi g_{kl}(0, x_0)} = \frac{1+x_0}{2(\arcsin \sqrt{(1+x_0)/2})^2}, \quad (I46)$$

то можно увидеть, что с ростом $x_0 = M/J$ ширина линии уменьшается. Этим система двухуровневых молекул отличается от осциллятора, где ширина линии излучения не зависит от начального состояния.

Причину такого поведения можно понять, если записать ширину линии при излучении эквидистантной системы из начального уровня $n_0 \gg 1$ в квазиклассическом приближении

$$\Delta(n_0) \sim n_0 / \left[\int_0^{n_0} dn / \langle n-1 | \hat{A}_- | n \rangle \right]^2, \quad (I47)$$

здесь $\langle n-1 | \hat{A}_- | n \rangle$ - матричный элемент понижающего лестничного оператора. В случае осциллятора $\langle n-1 | \hat{A}_- | n \rangle \sim \sqrt{n}$ и ширина не зависит от n_0 , а для спиновой системы $\langle j, n-1 | \hat{A}_- | j, n \rangle \sim \sqrt{(2j-n)n}$ откуда и получается выражение (I46) (см. также [48]).

В статье [II] рассмотрена также релаксация в системе двухуровневых молекул, размеры которой превышают длину волны λ .

Л.А.Шелепиним и сотрудниками в работах [49] проведено изучение релаксации в модели Дике с учетом упругих и неупругих столкно-

вений излучателей, а также релаксации в присутствии резонансного электромагнитного (классического) поля.

10ж). Сингулярный осциллятор в термостате и уравнение Фоккера-Планка на плоскости Лобачевского

Покажем здесь, что при описании релаксации квантовой системы с динамической группой $\widetilde{SU}(1,1)$ также оказывается полезным метод уравнения Фоккера-Планка.

В качестве конкретной системы, имеющей динамическую группу $\widetilde{SU}(1,1)$ будем рассматривать сингулярный осциллятор - задачу о движении частицы в потенциале $V(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2 + g/x^2$. Хорошо известно [50] (см. также часть I § 4в), что операторы $\hat{K}_+ = \frac{1}{2}(g/x^2 - \hat{a}^+\hat{a})$, $\hat{K}_- = \frac{1}{2}(g/x^2 - \hat{a}\hat{a}^+)$ (\hat{a} , \hat{a}^+ - обычные операторы рождения и уничтожения) вместе с оператором $\hat{K}_0 = \frac{1}{2}\hat{H} = \frac{1}{4\mu}\hat{p}^2 + \frac{1}{4}\mu\omega^2 x^2 + \frac{g}{2x^2}$, образуют базис унитарного неприводимого представления T_+^k группы $\widetilde{SU}(1,1)$, где $k = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{g}{2}}$.

Релаксация сингулярного осциллятора подчиняется операторному уравнению (II), в котором оператор \hat{A}_+ заменяется на \hat{K}_+ , а \hat{A} на \hat{K}_- , являющиеся повышающим и понижающим операторами соответственно.

Для вывода уравнения Фоккера-Планка кратко напомним (см. часть I), что когерентные состояния на группе $\widetilde{SU}(1,1)$ в случае унитарных представлений дискретной серии T_+^k определяются формулой

$$|\xi\rangle = (1 - |\xi|^2)^k e^{\xi \hat{K}_+} |0\rangle \quad (I48)$$

Здесь $|0\rangle$ - "вакуумный" вектор, причем $\hat{K}_- |0\rangle = 0$, $\hat{K}_0 |0\rangle = \nu_0 |0\rangle$, $\langle 0|0\rangle = 1$, ξ - точка единичного круга на комплексной плоскости ($|\xi| < 1$).

Как и в задаче о релаксации спина будем рассматривать такой класс смешанных состояний, что для матрицы плотности справедливо P - представление

$$\hat{\rho}(t) = \int_{|\xi| < 1} d\mu(\xi) P(\xi, \bar{\xi}, t) |\xi\rangle \langle \xi|, \quad (I49)$$

где $d\mu(\xi) = \frac{2k-1}{\pi} d\text{Re}\xi d\text{Im}\xi / (1 - |\xi|^2)^2$ - инвариантная нормированная мера на плоскости Лобачевского.

Из явного вида когерентных состояний (I48) можно получить соотношения

$$\begin{aligned}
\hat{K}_+ |s\rangle\langle s| &= \left(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{2k\bar{s}}{1-s\bar{s}} \right) |s\rangle\langle s|, \\
\hat{K}_- |s\rangle\langle s| &= \left(s^2 \frac{\partial}{\partial s} + \frac{2k\bar{s}}{1-s\bar{s}} \right) |s\rangle\langle s|, \\
|s\rangle\langle s| \hat{K}_+ &= (\hat{K}_- |s\rangle\langle s|)^+, \\
|s\rangle\langle s| \hat{K}_- &= (\hat{K}_+ |s\rangle\langle s|)^+.
\end{aligned} \tag{I50}$$

(Выкладки, которые здесь нужно провести, аналогичны формулам (II4)-(II6) для спиновых когерентных состояний).

• Подставляя (I49) в (II) и используя формулы (I50), получаем после интегрирования по частям дифференциальное уравнение в частных производных для функции $P(s, \bar{s}; t)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{\gamma}{2} \left\{ \langle \nu \rangle \left[2(1+|s|^2) \frac{\partial^2}{\partial s \partial \bar{s}} - 2s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} - 2\bar{s}^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{s}^2} - \right. \right. \\
&\quad \left. - \left(2s + \frac{4k\bar{s}}{1-s\bar{s}} \right) \frac{\partial}{\partial s} - \left(2\bar{s} + \frac{4k s}{1-s\bar{s}} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \right] + \\
&\quad \left. + \left[2s^2 \bar{s}^2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial \bar{s}} - s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \bar{s}^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{s}^2} - 2k s \frac{\partial}{\partial s} - 2k \bar{s} \frac{\partial}{\partial \bar{s}} + \frac{4(k-1)(1-|s|^4)}{(1-s\bar{s})^2} \right] \right\} P.
\end{aligned} \tag{I51}$$

При получении этого уравнения на функцию $P(s, \bar{s}, t)$ наложено граничное условие $P(s, \bar{s}, t)/(1-s\bar{s})^2 \rightarrow 0$ при $|s| \rightarrow 1$.

Если в (I50) сделать подстановку

$$P(s, \bar{s}, t) = (1-s\bar{s})^2 f(s, \bar{s}, t). \tag{I52}$$

то для функции $f(s, \bar{s}, t)$ получается уравнение Фоккера-Планка, аналогичное уравнению (I20) в случае спиновых систем.

Если температура термостата $T = 0$, то из (I51) можно получить уравнение Фоккера-Планка для функции $\text{sh } \chi \cdot P(\chi, t)$, сделав подстановку $s = e^{-i\phi} \tanh \chi/2$ и предположив, что начальное распределение квазивероятности не зависит от угла ϕ .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (\text{sh } \chi P(\chi, t)) &= \frac{\partial}{\partial \chi} \left[\left(\frac{\text{sh } \chi}{2(1+\text{ch } \chi)} - k \text{sh } \chi \right) \text{sh } \chi \cdot P(\chi, t) \right] - \\
&\quad - \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \left[\frac{1-\text{ch } \chi}{2} \cdot \text{sh } \chi \cdot P(\chi, t) \right].
\end{aligned} \tag{I53}$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (I53) описывает сдвиг пакета квазивероятности как целого по плоскости Лобачевского, а второе слагаемое — расплывание (диффузию) пакета. Таким образом, квантовый процесс релаксации и в этой задаче удается описать классическим уравнением Фоккера-Планка.

Интересно, что (I53) связано аналитическим продолжением по углу χ и квантовому числу k , нумерующему представления, с аналогичным уравнением для спиновых систем, которое изучалось в работах [13, 16-21]. Уравнение для функции $f(\gamma, \bar{\gamma}, t)$ из (I52) подобным же образом связано с уравнением (I20).

Последнее обстоятельство наводит на мысль о том, что для получения решений уравнения (I51) можно воспользоваться аналитическим продолжением решений уравнения Фоккера-Планка для спиновой системы (I20). Реализация этой программы затруднена тем, что решения уравнения (I20) не были получены в общем виде для произвольного спина.

В принципе, контравариантный символ можно искать в виде разложения по собственным функциям оператора Лапласа-Бельтрами на плоскости Лобачевского

$$\Delta = [1 - \gamma \bar{\gamma}]^2 \frac{\partial^2}{\partial \gamma \partial \bar{\gamma}}.$$

Теория таких собственных функций изложена в работах [51-54]. Наиболее интересной здесь является возможность применения собственных функций в виде обобщенных "плоских" волн, изученных С.Хелгасоном [52], которые аналогично обычным плоским волнам постоянны на ориспикалах плоскости Лобачевского. (В общем случае пространства Лобачевского орисферы являются обобщениями гиперплоскостей). Мы, однако, не будем рассматривать здесь этот круг задач.

В заключение кратко остановимся на вопросе о ширине контура линии излучения сингулярного осциллятора.

Задача I07. В начальный момент времени сингулярный осциллятор находился в чистом состоянии $\hat{\rho}(0) = |k, n\rangle \langle k, n|$

$$(\hat{K}^2 |k, n\rangle = k(k-1) |k, n\rangle, \quad \hat{K}_0 |k, n\rangle = (k+n) |k, n\rangle).$$

Показать, что в этом случае нормированная спектральная плотность излучения равна

$$g_n^k(\omega) = \frac{k\gamma}{\pi(2k+n)} \sum_{\ell=0}^n \sum_{\ell'=0}^{n'} \left[\frac{\Gamma(2k+n+1) \cdot n!}{\Gamma(2k+n'+1) \cdot n!} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{Re} \prod_{\tau=\ell'}^{\ell} (k(k-1) - \tau^2 + i(\omega - \omega_0)/\gamma)^{-1} \right]. \quad (I54)$$

Вычислить в квазиклассическом приближении (по формуле (I47)) ширину линии и показать, что с ростом n ($n \gg 1$) ширина увеличивается.

§ 11. ГРУППЫ ЛИ И ИНТЕГРАЛЫ ПО ТРАЕКТОРИЯМ

В последнее время подход, основанный на формулировке квантовой теории с помощью фейнмановских интегралов по траекториям (континуальных интегралов), широко применяется в квантово-полевых теориях элементарных частиц, для описания многочастичных систем, что привело к существенному прогрессу в аппарате теоретической физики [55 - 58]. Метод интегралов по траекториям является интуитивно наглядным и универсальным. С его помощью легко записываются ряды теории возмущений, находятся квазиклассические асимптотики, а также получаются важные результаты, справедливые за пределами применимости теории возмущений [58].

В настоящем параграфе мы продолжим, основываясь, главным образом, на работах [59-64], начатое в § 9 части II исследование модельных квантовых систем, гамильтониан которых представлен в виде функции генераторов динамической группы G . Роль теории групп состоит здесь в том, что на основе известной динамической группы гамильтониана, можно построить базис когерентных состояний [13] и рассматривать однородное пространство $G_0 \backslash G$ (точки которого нумеруют когерентные состояния) в качестве фазового пространства классического аналога квантовой задачи. Тем самым здесь естественно возникают обобщения так называемых гамильтоновых континуальных интегралов на случай квантования фазовых пространств с кривизной, а более точно, симплектических многообразий - многообразий Калёра. Данный подход лежит в русле традиционных методов в теории континуальных интегралов. Его отличие от прежних работ заключается в том, что фейнмановский пропагатор ищется в представлении когерентных состояний на группе динамической симметрии, что расширяет возможность применения техники интегрирования по траекториям, а в ряде случаев позволяет вычислить точный пропагатор.

Заметим также, что в идейном (но не в техническом!) отношении этот подход близок методу геометрического квантования (см. в этой связи работы [65]).

М.С. Марinov и М.В. Терентьев [66] построили континуальные интегралы на компактных простых группах Ли и сферах произвольной размерности, но в отличие от [56-63] ими изучалась квантовая динамика в том случае, когда "гамильтонианом" является инвариантный оператор Лапласа-Бельтрами (оператор Казимира второго порядка), и использо-

вались лагранжевые методы.

Гораздо более радикальное применение теоретико-групповых методов при конструировании интегралов по траекториям развито в работах М.Б. Менского. Им, в частности, было найдено, что известный весовой множитель $\exp(\frac{i}{\hbar} S)$ (где S - классическое действие), присутствующий в фейнмановском интеграле, однозначно определяется требованием инвариантности относительно так называемой подгруппы траекторий. В формализме Менского подгруппа траекторий позволяет вывести из групповых соображений не только кинематику, но и динамику частиц во внешних полях.

С этим очень интересным и перспективным направлением читатель может познакомиться по работам [66-68].

IIa). Голоморфное представление когерентных состояний, ковариантные символы и фейнмановский пропагатор

При построении интегралов по траекториям мы будем следовать Ф.А. Березину [70], который показал, что наиболее последовательным методом введения интеграла по траекториям является запись свертки N символов (см. далее) оператора эволюции на инфинитезимальный интервал времени Δt и понимание континуального интеграла как некоторого предела этого многократного интеграла (см. также [57]). При этом используемый род символов зависит от способа квантования и определяет то, как надо выполнять предельный переход. Одновременно в [70] было выяснено, что континуальный интеграл сосредоточен на разрывных траекториях, которые не определены однозначно и также в конечном счете зависят от квантования. Ф.А. Березин в [70] рассматривались лишь континуальные интегралы для простейших квантовых задач, в которых появляется обычное плоское фазовое пространство (т.е. использовалась динамическая группа Гайзенберга-Вейля $W(n)$). Однако этот метод допускает естественное обобщение на общий случай произвольной динамической группы G [62] (при некоторых ограничениях, которые будут изложены ниже).

Будем изучать динамику квантовой системы, гамильтониан которой имеет реализацию следующего вида

$$\hat{H} = f(\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_r) \quad (I)$$

т.е. является операторнозначной функцией генераторов алгебры Ли группы динамической симметрии G .

Здесь, $[A_k, A_l] = i C_{kl}^m A_m$, C_{kl}^m — структурные постоянные группы G . Далее мы увидим, что существует достаточно широкий класс нетривиальных физических задач, для которых справедливо представление (I) по крайней мере в качестве разумного приближения.

Будем предполагать, что генераторы $\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_r$ реализуют неприводимое представление алгебры Ли группы G . В этом случае гильбертово пространство \mathcal{H} состояний квантовой системы может быть естественно отождествлено с пространством унитарного неприводимого представления $\hat{T}(g)$ динамической группы G . Поэтому можно построить систему когерентных состояний [13, 71].

$$|\xi\rangle = \hat{T}(g_\xi) |0\rangle, \quad (2)$$

где g_ξ — точка однородного пространства $X = G_0 \backslash G$ (представитель правого класса смежностей группы G по подгруппе G_0). $G_0 \subset G$ — стационарная подгруппа вектора $|0\rangle \in \mathcal{H}$, т.е. $\forall g_0 \in G_0$, $\hat{T}(g_0)|0\rangle = e^{-i\alpha(g_0)} |0\rangle$, $\alpha(g_0): G \rightarrow \mathbb{R}$. Вектор $|0\rangle$ удобно выбрать так, чтобы G_0 была наибольшей. Если, например G компактная полупростая группа, то $|0\rangle$ — вектор доминантного (старшего) веса [72].

Мы ограничимся здесь тем случаем, когда модельный гамильтониан имеет только дискретный спектр, т.е. будем рассматривать случай только квадратично интегрируемых когерентных состояний.

Пусть, далее, представление $\hat{T}(g)$ такое, что для когерентных состояний выполняется условие полноты

$$\int_X d\mu(\xi) |\xi\rangle \langle \xi| = \hat{I}, \quad d\mu(\xi, g) = d\mu(\xi) \quad (3)$$

Фактор-пространство $X = G_0 \backslash G$ может быть наделено однородной комплексной структурой, т.е. можно ввести локальные комплексные координаты $\xi = g_\xi \rightarrow z = (z^1, \dots, z^n)$. (см. [64, 73, 74]).

Покажем то, как проводится комплексификация в частном случае однородного пространства компактной вещественной полупростой группы Ли G . Пусть \mathcal{G} её алгебра Ли. Рассмотрим комплексную

оболочку этой алгебры-комплексную полупростую алгебру \underline{G}^c и, соответствующую группу G^c (т.е. G - вещественная компактная форма группы G^c). Стандартная форма коммутационных соотношений для \underline{G}^c имеет вид [75]

$$[H_i, E_\alpha] = \tau_\alpha(i) E_\alpha,$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \sum_i \tau_\alpha(i) H_i,$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta},$$

где ℓ генераторов H_i образуют максимальную абелеву подалгебру \mathcal{A}_0 и n генераторов E_α и $E_{-\beta}$ являются, соответственно, повышающими и понижающими операторами.

Некоторое неприведенное представление \underline{G}^c задается состоянием $|m_{\max}\rangle$ с максимальным весом

$$H_i |m_{\max}\rangle = m_i |m_{\max}\rangle, \quad i = 1, \dots, \ell,$$

$$E_\alpha |m_{\max}\rangle = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Элементы комплексной полупростой группы G^c допускают разложение Гаусса

$$g = g_+ \cdot g_0 \cdot g_-,$$

где

$$g_+ = \exp \left[\sum_\beta z^\beta E_\beta \right],$$

$$g_0 = \exp \left[\sum_i v^i H_i \right],$$

$$g_- = \exp \left[\sum_\alpha \bar{w}^\alpha E_{-\alpha} \right],$$

$$g_+ \in G_+^c, \quad g_0 \in G_0^c, \quad g_- \in G_-^c.$$

Из коммутационных соотношений можно увидеть, что G_0^c и G_-^c порождают подпрямое произведение - группу K^c с инвариантной подгруппой, изоморфной G_-^c . Отсюда ясно, что G_+^c находится во взаимнооднозначном соответствии с фактор-пространством $K^c \backslash G^c$, где $K^c = G_0^c G_-^c$.

Мы здесь интересуемся вещественной компактной группой $G \subset G^c$. Подгруппы G_+^c и G_-^c не принадлежат G . Подгруппа G_0^c распадается на группы: $G_0 \subset G$ и на вторую подгруппу G'_0 , элементы которой образуют фактор-пространство $G_0 \backslash G_0^c$.

Фактор-пространство $G_0 \backslash G_0^c$ может быть параметризовано элементами $g_+ \in G_+^c$.

В самом деле, запишем для $\forall g \in G^c$ разложение

$$g = g_+ \cdot g_- \cdot g'_0 \cdot g_0, \quad g_+ \in G_+^c, \quad g_- \in G_-^c, \quad g'_0 \in G'_0.$$

Видно, что фактор-пространство $G_0 \backslash G^c$ параметризуется произведением $g_+ \cdot g_- \cdot g'_0$. После ограничения G^c до G видно, что существуют соотношения связи между этими тремя множителями в результате чего произведение зависит только от $2n$ вещественных параметров и нужно показать, что эти $2n$ параметров связаны с вещественными и мнимыми частями n комплексных переменных z^a . Сравнивая, далее, разложение $g_+ \cdot g_- \cdot g'_0$ в окрестности единицы со стандартной формой элемента фактор-пространства $g_f \in G_0 \backslash G$

$$g_f = \exp \left[\sum_a \bar{z}^a E_{-a} + \sum_a z^a E_a \right],$$

получаем, что фактор-пространство $K \backslash G^c = G_0 \backslash G$.

Откуда $g_f \rightarrow z = (z^1, \dots, z^n)$ — локальные комплексные координаты на X .

В случае некомпактной группы G ситуация другая [73].

После введения на X комплексных координат когерентные состояния $|z\rangle$ будем нумеровать комплексными числами z , т.е. $|z\rangle \equiv |z(z^1, \dots, z^n)\rangle$, причем $|0\rangle = |z(0, \dots, 0)\rangle$, т.е. точке G_0 . Фактор-пространства $G_0 \backslash G$ ставится в соответствие $z = (0, \dots, 0)$. Пространство состояний \mathcal{H} можно реализовать в виде гильбертова пространства голоморфных функций на $X \subset \mathbb{C}_n$, причем скалярное произведение имеет вид

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_X \bar{\psi}_1(z) \psi_2(z) \exp[-\rho(z, \bar{z})] d\mu(z, \bar{z}). \quad (4)$$

Здесь вектору $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ поставлена в соответствие голоморфная функция

$$\psi(z) \equiv \psi(z^1, \dots, z^n) = \frac{\langle z | \psi \rangle}{\langle z | 0 \rangle} = \frac{\langle 0 | \hat{T}(g_z^{-1}) | \psi \rangle}{\langle 0 | \hat{T}(g_z^{-1}) | 0 \rangle}, \quad (5)$$

а $d\mu(z, \bar{z})$ — инвариантная мера на $X \subset \mathbb{C}_n$, нормированная условием $\int_X \exp[-\rho(z, \bar{z})] d\mu(z, \bar{z}) = 1$, $\rho(z, \bar{z}) = \ln \langle 0 | z \rangle^2$.

При выводе формулы (5) принципиально важно выполнение условий (3).

Пространство \mathcal{H} со скалярным произведением (4) является обобщением хорошо известного пространства Баргмана-Сударшана, связанно-

го с когерентными состояниями Глаубера для группы Гейзенберга-Вейля $W(N)$ [76, 77]. Впервые оно фактически было введено еще В.В.Фомом [78], который нашел реализацию бозонных операторов рождения и уничтожения \hat{a}, \hat{a}^+ ($[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$) в виде $\hat{a}^+ = z$, $\hat{a} = d/dz$

Задача I08. Используя явный вид когерентных состояний $|z\rangle$ для групп $W(1)$, $SU(2)$ и $SU(1,1)$, показать что:

1) в случае $W(1)$ гильбертово пространство представления индентифицируется с множеством голоморфных целых функций на комплексной плоскости, со скалярным произведением

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2\pi i} \bar{\psi}_1(z) \psi_2(z) e^{-z\bar{z}}$$

и проверить, что по отношению к этому скалярному произведению операторы $\hat{a}^+ = z$, $\hat{a} = d/dz$ эрмитово сопряжены друг другу.

2) в случае $SU(2)$ пространство представления \mathcal{D}^j (j - спин) - с множеством полиномов по z степени не выше $2j$, причем

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \frac{2j+1}{2\pi i} \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{(1+z\bar{z})^{2j+2}} \bar{\psi}_1(z) \psi_2(z)$$

3) Гильбертовы пространства представлений дискретной серии T_+^k группы $SU(1,1)$ с $(1-z\bar{z})^{-k}$ - ограниченными голоморфными функциями в круге единичного радиуса $\{|z| < 1\}$, для которых скалярное произведение равно

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \frac{2k-1}{2\pi i} \int_{|z|<1} d\bar{z} \wedge dz (1-z\bar{z})^{2k-2} \bar{\psi}_1(z) \psi_2(z)$$

Задача I09. Проверить, что требование унитарности представления $\hat{T}(g)$ по отношению к скалярному произведению (4) приводит к тому, что $\hat{T}(g)$ действует на функцию $\psi(z)$ по формуле

$$(\hat{T}(g')\psi)(z) = \phi(g', z) \psi(z \cdot g'), \quad (6)$$

где $\phi(g', z) = \frac{\langle z | \hat{T}(g'^{-1}) | 0 \rangle}{\langle z | 0 \rangle}$ - голоморфна по z .

Введем функцию $K(z, \bar{w}) = \langle z | w \rangle / \langle z | 0 \rangle \langle 0 | w \rangle$, которая голоморфна по z , антиголоморфна по \bar{w} [79] и выполняет в гильбертовом пространстве \mathcal{H} роль δ -функции, т.е. для любой голоморфной функции $\psi(z)$ справедливо соотношение

$$\psi(z) = \int_X K(z, \bar{w}) \exp[-\rho(w, \bar{w})] \psi(w) d\mu(w, \bar{w}). \quad (7)$$

$K(z, \bar{w})$ является воспроизводящимся ядром [13, 71, 79]. Очевидно также, что $\ln K(z, \bar{z}) = \rho(z, \bar{z})$.

Каждому оператору \hat{F} , определенному в пространстве векторов состояния поставим в соответствии ковариантный символ $\mathcal{F}(z, \bar{z})$. При этом

$$(\hat{F}\psi)(z) = \int \mathcal{F}(z, \bar{w}) \frac{K(z, \bar{w})}{K(w, \bar{w})} d\mu(w, \bar{w}), \quad (8)$$

где $\mathcal{F}(z, \bar{w}) = \langle z | \hat{F} | w \rangle / \langle z | w \rangle$.

Задача II.0. Доказать, что если $\hat{F} = \hat{F}_1 \hat{F}_2$, то

$$\mathcal{F}(z, \bar{z}) = \int_X \mathcal{F}_1(z, \bar{w}) \mathcal{F}_2(w, \bar{z}) \frac{K(z, \bar{w}) K(w, \bar{z})}{K(z, \bar{z}) K(w, \bar{w})} d\mu(w, \bar{w}). \quad (9)$$

Если модельный гамильтониан \hat{H} имеет вид полиномиальной операторнозначной функции (I), то нахождение ковариантного символа $\mathcal{H}(z, \bar{z})$ сводится к вычислению матричных элементов генераторов представления $\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_2$ между когерентными состояниями.

Формула (9) является основной для построения фейнмановского пропагатора в виде интеграла по траекториям для квантовых систем с гамильтонианами (I).

Как хорошо известно [2], формальный оператор эволюции можно записать в виде упорядоченной по Дайсону экспоненты

$$\hat{U}(t, t_0) = T_D \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(\tau) d\tau \right]$$

(В общем случае гамильтониан может явно зависеть от времени).

Если $t = t_0 + \Delta t$, где $|\Delta t| \ll 1$, то

$$\hat{U}(t_0 + \Delta t, t_0) \approx \hat{I} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \hat{H}(\tau) d\tau,$$

откуда с учетом малости Δt легко получить, что ковариантный символ оператора $\hat{U}(t_0 + \Delta t, t_0)$ имеет простой вид

$$\mathcal{U}(z, \bar{z} | t_0 + \Delta t, t_0) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \mathcal{H}(z, \bar{z} | \tau) d\tau \right], \quad (10)$$

где $\mathcal{H}(z, \bar{z} | \tau)$ — ковариантный символ гамильтониана.

Для отыскания символа оператора эволюции $\hat{U}(t, t_0)$ разобьем отрезок $[t_0, t]$ на m участков $\Delta t = (t - t_0)/m$ и используем групповое свойство оператора эволюции (метод Швебера)

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t, t_{m-1}) \hat{U}(t_{m-1}, t_{m-2}) \cdots \hat{U}(t_1, t_0), \quad (II)$$

$$t_k = t_{k-1} + \Delta t; \quad t_n = t, \quad k = 1, \dots, m.$$

Задача III. Сопоставляя каждому оператору $\hat{U}(t_k, t_{k-1})$ ковариантный символ вида (IQ) и многократно пользуясь формулой (9), показать, что

$$\mathcal{U}^{(m)}(z, \bar{z} | t_m, t_0) = \int_X \cdots \int_X \exp\left[\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}^{(m)}\right] \prod_{k=1}^{m-1} d\mu(z_k, \bar{z}_k), \quad (I2)$$

$$\mathcal{S}^{(m)} = \frac{\hbar}{i} \left\{ \sum_{k=1}^m \left[\ln K(z_{k-1}, \bar{z}_k) - \frac{1}{2} \ln K(z_{k-1}, \bar{z}_{k-1}) - \frac{1}{2} \ln K(z_k, \bar{z}_k) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \ln K(z_m, \bar{z}_m) - \frac{1}{2} \ln K(z_0, \bar{z}_0) \right\} - \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathcal{H}(z_{k-1}, \bar{z}_k | \tau) d\tau \quad (I3)$$

Из интуитивных соображений ясно, что формула (I2) тем точнее аппроксимирует фейнмановский пропагатор, чем больше число разбиений m отрезка $[t_0, t]$. Пусть $z = z(t)$ — дифференцируемый путь, такой, что $z_k = z(t_k)$, $z(t_0) = z$, $\bar{z}(t_m) = \bar{z}$. Сделаем в (I2) подстановку $z(t_k) = z(t_{k-1}) + \Delta z_{k-1}$. Разлагая слагаемые в первой сумме из (I3) в ряд по степеням Δz_{k-1} и удерживая члены только первого порядка малости, совершим формальный предельный переход $m \rightarrow \infty$, $\Delta t \rightarrow 0$. В итоге получаем выражение для символа оператора эволюции в виде интеграла по траекториям на однородном пространстве X

$$\mathcal{U}(z, \bar{z} | t, t_0) = \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}\right) \prod_{t_0 < \tau < t} d\mu(z(\tau), \bar{z}(\tau)), \quad (I4)$$

где функция действия \mathcal{S} приведена к виду

$$\mathcal{S} = \int_0^t \left\{ i\hbar \sum_{\alpha=1}^n \left[\bar{\mathcal{Z}}_{\alpha}(\tau) \dot{z}^{\alpha}(\tau) - \mathcal{Z}_{\alpha}(\tau) \dot{\bar{z}}^{\alpha}(\tau) \right] - \right.$$

$$\left. - \mathcal{H}(z(\tau), \bar{z}(\tau) | \tau) \right\} d\tau + \frac{\hbar}{2i} \ln \frac{K(z(t), \bar{z}(t))}{K(z(t_0), \bar{z}(t_0))}. \quad (I5)$$

Мы ввели в (I5) обозначения

$$\mathcal{Z}_{\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}} \ln K(z, \bar{z}), \quad \bar{\mathcal{Z}}_{\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \ln K(z, \bar{z}) \quad (I6)$$

В формуле (I5) символ гамильтониана записан со сдвигом аргумента, что отражает способ задания символа в допредельном выраже-

нии и то, что интеграл по траекториям (I4) понимается как предел конечнократного интеграла (I2) (см. в этой связи обзор Ф.А.Березина [70]).

Конкретные примеры будут изучены ниже, а мы сейчас перейдем к обсуждению квазиклассической асимптотики интеграла по траекториям (I4) и покажем, что она приводит к классической динамике в многообразиях Кэлера, которые дают важные примеры фазовых пространств классических систем [80, 81].

II6). Квазиклассическая асимптотика и многообразия Кэлера

В пределе при $\hbar \rightarrow 0$ доминирующий вклад в интеграл по траекториям (I4) дается теми путями $z = z(t)$ с фиксированными концевыми точками, для которых функционал действия S^c экстремален — приближение стационарной фазы [81, 82].

Нетрудно увидеть, что из условия $\delta S^c = 0$, следует, что классическая траектория (траектории) должна подчиняться уравнениям движения

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} \frac{\partial \mathcal{H}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}^\alpha} &= \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 \ln K(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}^\alpha \partial z^\beta} \dot{z}^\beta, \\ -\frac{i}{\hbar} \frac{\partial \mathcal{H}(z, \bar{z})}{\partial z^\alpha} &= \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 \ln K(z, \bar{z})}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \dot{\bar{z}}^\beta \end{aligned} \quad (I7)$$

и удовлетворять граничным условиям $z(t_0) = z$, $\bar{z}(t) = \bar{z}$.

Заметим, что в квазиклассическом пределе (для гладкой классической траектории) $\mathcal{H}(z(\tau), \bar{z}(\tau+0)) = \mathcal{H}(z(\tau), \bar{z}(\tau))$, однако в общем случае учет сдвига аргумента в символе гамильтониана является принципиально важным.

Покажем, что уравнения (I7) являются каноническими (т.е. уравнениями типа уравнений Гамильтона [80]). Для этого введем на $X = G/G$ симплектическую структуру, определив дифференциальную 2-форму

$$\omega^2 = \frac{i}{2} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 \ln K(z, \bar{z})}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta \quad (I8)$$

Задача II2. Доказать, что ω^2 является G -инвариантной формой, т.е. сохраняется при преобразовании сдвига $z \rightarrow z \cdot g'$, $\forall g' \in G$, т.е. $g'_* \omega^2 = \omega^2$, где $g'_* \omega^2 \equiv \frac{i}{2} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \ln K(z \cdot g', \bar{z} \cdot g') dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$.

Указание: Использовать формулу (6) и голоморфность функции $\phi(g', z)$.

Согласно (18) G - инвариантная форма ω^2 задает на $X = G_0 \backslash G$ кэлерову метрику. Напомним, что для того, чтобы 2-форма $(i/2) \sum_{\alpha, \bar{\beta}} g_{\alpha \bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$ была кэлеровой, необходимо и достаточно [81, 83], чтобы для эрмитовой матрицы $g_{\alpha \bar{\beta}}$ выполнялись условия

$$\begin{aligned} \partial g_{\alpha \bar{\beta}} / \partial z^\gamma &= \partial g_{\gamma \bar{\beta}} / \partial z^\alpha, \\ \partial g_{\alpha \bar{\beta}} / \partial \bar{z}^\gamma &= \partial g_{\alpha \bar{\gamma}} / \partial \bar{z}^\beta. \end{aligned} \quad (19)$$

В нашем случае $g_{\alpha \bar{\beta}} = \partial^2 \ln K(z, \bar{z}) / \partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta$ поэтому эрмитовость и условия (19) выполнены автоматически.

Существование формы ω^2 позволяет определить скобку Пуассона на двух функций на X

$$\{f_1, f_2\}(z, \bar{z}) = \frac{i}{h} \sum_{\alpha, \bar{\beta}} g^{\alpha \bar{\beta}} \left[\frac{\partial f_1}{\partial z^\alpha} \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}^\beta} - \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}^\beta} \frac{\partial f_2}{\partial z^\alpha} \right], \quad (20)$$

где $(g^{\alpha \bar{\beta}})$ - матрица, обратная матрице $(g_{\alpha \bar{\beta}})$, т.е. $\sum_{\beta} g_{\alpha \bar{\beta}} g^{\beta \bar{\gamma}} = \delta_\alpha^\gamma$.

Задача II.3. Проверить, что уравнения (17) в результате приводятся к гамильтонову виду

$$\dot{z}_\alpha = \{z_\alpha, \mathcal{H}\}, \quad \dot{\bar{z}}_\alpha = \{\bar{z}_\alpha, \mathcal{H}\}. \quad (21)$$

В итоге мы приходим к следующему фундаментальному результату: однородное пространство $G_0 \backslash G$ (многообразие Кэлера X), где G - динамическая группа квантового гамильтониана, является G - инвариантной Гамильтоновой динамической системой (классическим аналогом изучаемой квантовой задачи). При этом роль классических наблюдаемых выполняют ковариантные символы квантовых операторов, действующих в гильбертовом пространстве унитарного неприводимого представления динамической группы G . Из (21) видно, что функцией Гамильтона, определяющей классические траектории, является символ гамильтониана $\mathcal{H}(z, \bar{z})$.

Интересно, что в рамках излагаемого подхода классические аналоги появляются и у таких систем, которые традиционно считаются "истинно квантовыми", например, у оптических. Идея об использовании в квантовой механике фазового пространства классического аналога

содержалась уже в теории непрерывных представлений Дж.Клаудера [84], которым были по существу введены когерентные состояния для достаточно общего случая групп Ли.

Интересен по траекториям, определяемый формулами (14), (15), задает способ квантования классической динамической системы, эволюция которой подчиняется уравнениям (21). При этом и квантовая и классическая системы имеют одну группу динамической симметрии G , только квантовая динамика связана с унитарным неприводимым представлением группы G , а классическая — с потоками на многообразии X , определяемыми самой группой G . Спектру унитарных неприводимых представлений группы G отвечает набор квантовых систем, имеющих один и тот же классический аналог (неоднозначность квантования). Отметим, что в идейном отношении излагаемый подход близок методу геометрического квантования, развиваемого в работах Кириллова, Костанта и Симмса, Сурьо [81].

Если группа G является динамической группой с линейной реализацией, т.е. гамильтониан есть линейная комбинация генераторов группы G

$$\hat{H} = \sum_k \omega_k \hat{A}_k \quad (1')$$

(см. § 5, части II), то оператор эволюции $\hat{U}(t-t_0)$ является оператором представления группы G . В этом случае квазиклассика приводит к точному ответу в том смысле, что уравнения (21) совпадают с точными уравнениями, определяющими эволюцию когерентного состояния на группе G , если искать решение временного уравнения Шредингера $i\hbar \partial |\psi\rangle / \partial t = \hat{H} |\psi\rangle$ с гамильтонианом вида (1') в виде $|\psi(t)\rangle = e^{-i\varphi(t)} |z(t)\rangle$, где $|z(t)\rangle$ — к.с. на группе G .

Это утверждение будет ниже проиллюстрировано конкретными примерами.

Как известно из курса квантовой механики [1, 2] в квазиклассическом приближении дискретные уровни энергии в случае финитного одномерного движения определяются формулой Бора-Зоммерфельда

$$\oint p \cdot dq = 2\pi\hbar \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (22)$$

где $n \geq 0$ — целое число и интеграл берется по периоду движения (см. также [8]).

Выведем аналог формулы Бора-Зоммерфельда для квантования классической динамики в многообразии Калера. Для этого вернемся к выра-

жению (14) для ковариантного символа $\mathcal{U}(z, \bar{z} | t, t_0)$ (Фейнманов-ского пропагатора в представлении когерентных состояний) и более детально рассмотрим приближение стаци- (Фейнманов-ского пропагатора в представлении когерентных состояний) $X = 0$.

Функционал действия S представим в виде

$$S = S_{\text{кл}} + S^{(2)},$$

где $S_{\text{кл}}$ - классическое действие, вычисленное вдоль определяемой уравнениями (21),

$S^{(2)}$ - вторая вариация функционала действия

$$S^{(2)} = \int_{t_0}^t \left\{ \frac{i\hbar}{4} \sum_{\alpha, \beta} \left[\mathcal{M}_{\alpha\beta}(\tau) \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta + \mathcal{M}_{\alpha\bar{\beta}}(\tau) \dot{\xi}^\alpha \dot{\bar{\xi}}^\beta - \right. \right. \\ \left. \left. - \mathcal{M}_{\bar{\alpha}\beta}(\tau) \dot{\bar{\xi}}^\alpha \dot{\xi}^\beta - \mathcal{M}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\tau) \dot{\bar{\xi}}^\alpha \dot{\bar{\xi}}^\beta \right] - \right. \\ \left. - \sum_{\alpha, \beta} \left[\mathcal{N}_{\alpha\beta}(\tau) \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta + \mathcal{N}_{\alpha\bar{\beta}}(\tau) \dot{\xi}^\alpha \dot{\bar{\xi}}^\beta + \mathcal{N}_{\bar{\alpha}\beta}(\tau) \dot{\bar{\xi}}^\alpha \dot{\xi}^\beta \right] d\tau. \right. \quad (24)$$

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta}(\tau) = \frac{\partial^2 \ln K(z, \bar{z})}{\partial z^\alpha \partial z^\beta} \bigg|_{\substack{z = z_{\text{кл}}(\tau) \\ \bar{z} = \bar{z}_{\text{кл}}(\tau)}}, \quad \mathcal{M}_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial^2 \ln K(z, \bar{z})}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \bigg|_{\substack{z = z_{\text{кл}}(\tau) \\ \bar{z} = \bar{z}_{\text{кл}}(\tau)}},$$

$$\mathcal{M}_{\bar{\alpha}\beta}(\tau) = \overline{\mathcal{M}_{\alpha\beta}(\tau)},$$

$$\mathcal{N}_{\alpha\beta}(\tau) = \overline{\mathcal{N}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\tau)} = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln K(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}^\alpha \partial z^\beta} - \frac{i\hbar}{4} \sum_{\gamma} \frac{\partial^3 \ln K(z, \bar{z})}{\partial z^\alpha \partial z^\beta \partial z^\gamma} \dot{z}^\gamma \right] \bigg|_{\substack{z = z_{\text{кл}}(\tau) \\ \bar{z} = \bar{z}_{\text{кл}}(\tau)}}$$

Здесь введена вариация траектории $\xi^\alpha = z^\alpha - z_{\text{кл}}^\alpha$, $\bar{\xi}^\alpha = \bar{z}^\alpha - \bar{z}_{\text{кл}}^\alpha$.

В результате квазиклассический пропагатор приводится к виду

$$\mathcal{U}_{\text{кв, кл}} = \tilde{\mathcal{U}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{\text{кл}}\right), \quad (25)$$

где $\tilde{\mathcal{U}}$ определено формулой

$$\tilde{\mathcal{U}} = \sqrt{\frac{K(z(t), \bar{z}(t))}{K(z(t_0), \bar{z}(t_0))}} \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} S^{(2)}\right) \prod_{t_0 < \tau < t} \mathcal{M}(z_{\text{кл}}, \bar{z}_{\text{кл}}) \prod_{\alpha=1}^n dR_\alpha \dot{\xi}^\alpha d\text{Im} \dot{\xi}^\alpha, \\ (d\mu(z, \bar{z}) \equiv \mathcal{M}(z, \bar{z}) \prod_{\alpha=1}^n dR_\alpha z^\alpha d\text{Im} z^\alpha)$$

Явный вид $\tilde{\mathcal{U}}$ для нас пока не является важным.

Для вывода квазиклассического условия квантования будем следовать работе Келлера [86], согласно которой квазиклассическая волно-

вая функция

$$\psi_{\text{кв.кл.}}(x, t) = A(x, t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_{\text{кл.}}(x, t) \right] \equiv$$

$$\equiv \exp \left\{ i \left[S_{\text{кл.}} + \left(\frac{\hbar}{i} \right) \ln A \right] / \hbar \right\}$$

Интеграл

даёт способ однозначной по отношению к аргументу x . Условие односторонности приводит к ограничению на изменение фазы $\Delta S_{\text{кл.}} + \frac{\hbar}{i} \Delta \ln A$ классическая система вдоль замкнутой классической орбиты, что и даёт условие квантования Бора-Зоммерфельда.

Запишем квазиклассический символ оператора эволюции в виде

$$\mathcal{U}_{\text{кв.кл.}} = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[S_{\text{кл.}} + \frac{\hbar}{i} \ln \tilde{\mathcal{U}} \right] \right\} \quad (26)$$

и вычислим изменение его фазы вдоль замкнутой классической орбиты Γ .

Из (15) и (23) следует, что

$$\Delta S_{\text{кл.}} = i\hbar \sum_{\alpha=1}^n \oint_{\Gamma} (\bar{\mathcal{Z}}_{\alpha} d\mathcal{Z}^{\alpha} - \mathcal{Z}_{\alpha} d\bar{\mathcal{Z}}^{\alpha}), \quad (27)$$

или, с учетом теоремы Стокса [43, 80] и формулы (18)

$$\Delta S_{\text{кл.}} = 2\hbar \int_{\Sigma} \omega^2 \equiv \hbar \sum_{\alpha, \beta=1}^n \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 \ln K(\bar{z}, z)}{\partial z^{\alpha} \partial \bar{z}^{\beta}} d\mathcal{Z}^{\alpha} \wedge d\bar{\mathcal{Z}}^{\beta}, \quad (28)$$

где интеграл от 2-формы ω^2 вычисляется по поверхности Σ , охваченной траекторией Γ .

Изменение $\Delta \ln \tilde{\mathcal{U}}$ определяется (согласно Келлеру [86]) числом сингулярностей $\tilde{\mathcal{U}}$ вдоль классической орбиты. При прохождении каждой сингулярности (фокальной точки) $\ln \tilde{\mathcal{U}}$ изменяется на $i\pi/2$. Если число фокальных точек равно ν , то полное изменение $\ln \tilde{\mathcal{U}}$ равно $i\nu\pi/2$. Отсюда, потребовав, чтобы $\mathcal{U}_{\text{кв.кл.}}$ было однозначным (суммарная фаза может измениться на $2\pi n$), получаем

$$2 \int_{\Sigma} \omega^2 = \left(2n + \frac{\nu}{2} \right) \pi, \quad (29)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$

Число ν , фигурирующее в формуле (29), называют также [80] индексом Маслова-Морса кривой Γ на многообразии X .

Формула (29) обобщает условие квантования Бора-Зоммерфельда (22) на случай классической динамики с фазовым пространством, являющимся многообразием Калера. Более общее условие квантования симплектических многообразий получено в недавней работе М.В. Карасева и

В.М.Маслова [87], в случае многообразия Калера оно сводится к (29).

Отметим, что для компактной динамической группы G "площадь" поверхности в (29) не может превосходить некоторой конечной величины, это приводит к ограничениям на изменение целого числа $n = 0, 1, \dots, N$ (конечность дискретного спектра гамильтониана), последнее, естественно, согласуется с тем, что все унитарные неприводимые представления компактной группы G конечномерны.

Прежде чем завершить рассмотрение квазиклассического предела, отметим, что формуле (6), которая определяет преобразования голоморфных функций при сдвиге $z \rightarrow z \cdot g'$ можно придать квазиклассический вид:

$$(\hat{T}(g') \Psi)(z) = \exp[i F(g', z)] \Psi(z \cdot g'),$$

где $F(g', z) = -i \ln \delta(g', z)$.

Задача II.4. Проверить, что $F(g', z)$ является голоморфной производящей функцией (канонического) преобразования при сдвиге $z \rightarrow z \cdot g'$, представима в виде [74]

$$F(g', z) = F(g, 0) + \int_0^z (\vartheta - g_* \vartheta),$$

где $\vartheta = \sum_{\alpha=1}^n (\bar{\mathcal{Z}}_{\alpha} d\bar{z}^{\alpha} - \mathcal{Z}_{\alpha} dz^{\alpha})$,

и является аналогом обычной производящей функции $F = \int (pdq - \mathcal{P}dQ)$ для канонического преобразования $(p, q) \rightarrow (P, Q)$.

Перейдем теперь к приложениям метода интегралов по траекториям к описанию конкретных систем.

II.5). Группа Гайзенберга-Вейля и интеграл по траекториям для бозонных систем

Задача представления фейнмановского пропагатора в виде интеграла по траекториям для бозонов является наиболее полно изученной [57, 70, 88, 89] для интегралов, которые мы здесь обобщаем. Поэтому ограничимся приведением краткой сводки результатов, отослав за подробностями читателя ко второй главе монографии А.А.Славнова и Л.Д.Фаддеева [57] и к обзору Ф.А.Березина [70].

Для системы бозонов гамильтониан представляется в виде функции от операторов рождения и уничтожения, являющихся генераторами группы Гайзенберга-Вейля $W(n)$

$$[\hat{a}_{\alpha}, \hat{a}_{\beta}^{\dagger}] = \delta_{\alpha\beta} \hat{I}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n. \quad (30)$$

n - число степеней свободы.

Напомним, что глауберовские когерентные состояния заданы формулой

$$|z\rangle = |z^1, \dots, z^n\rangle = \exp\left\{\sum_{\alpha=1}^n (\bar{z}^\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger - z^\alpha \hat{a}_\alpha)\right\} |0\rangle, \quad (31)$$

где $|0\rangle$ - вакуумный вектор (для последующих целей мы поменяли местами z и \bar{z} по сравнению с обычным определением, ср. § 3в, части I).

Отсюда легко находим вид ядра $K(z, \bar{w}) = \exp(z \cdot \bar{w})$ (здесь $z \cdot \bar{w} = \sum_{\alpha} z_{\alpha} \bar{w}_{\alpha}$). В этом случае из (16) получаем, что

$$\mathcal{L}_{\alpha} = \frac{1}{2} z_{\alpha}, \quad \bar{\mathcal{L}}_{\alpha} = \frac{1}{2} \bar{z}_{\alpha}$$

Ковариантный символ нормально упорядоченного оператора совпадает с виковским символом [70].

Легко проверить, что символ оператора \hat{a}_{α} равен \bar{z}^{α} , а символ оператора $\hat{a}_{\beta}^{\dagger} \rightarrow z^{\beta}$. Скобка Пуассона здесь имеет вид

$$\{f_1, f_2\}(z, \bar{z}) = \sum_{\alpha, \beta} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}_{\alpha}} \frac{\partial f_2}{\partial z_{\beta}} - \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}_{\alpha}} \frac{\partial f_1}{\partial z_{\beta}} \right),$$

по отношению к которой \bar{z}_{α} и z_{β} являются канонически сопряженными, т.е. $\{\bar{z}_{\alpha}, z_{\beta}\} = \delta_{\alpha\beta}$.

Задавая гамильтониан бозонов в нормально упорядоченном виде приходим к известному выражению для виковского символа оператора эволюции

$$\mathcal{U}(z, \bar{z} | t, t_0) = \int \exp\left\{\frac{1}{2} [\bar{z}(t) z(t) + \bar{z}(t_0) z(t_0)]\right\} \times \\ \times \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{2i} (\dot{\bar{z}} \dot{z} - \bar{z} \dot{z}) - \mathcal{H}(z(\tau), \bar{z}(\tau)) \right] d\tau \right\} \prod_{t_0 < \tau < t} \frac{d\bar{z}(\tau) dz(\tau)}{2\pi i}. \quad (32)$$

Здесь выписан одномерный вариант. (многомерные обобщения очевидны).

Рассмотрим случай одномерного гармонического осциллятора и вычислим виковский символ оператора эволюции. Метод стационарной фазы приводит здесь к точному ответу.

Условие экстремума действия совпадает с классическими уравнениями движения

$$\begin{aligned} \dot{z} + i\omega z &= 0, & \dot{\bar{z}} - i\omega \bar{z} &= 0 \\ z(t_0) &= z, & \bar{z}(t) &= \bar{z} \end{aligned} \quad (33)$$

Задача II5. Показать, что уравнения (33) совпадают с уравнениями, определяющими эволюцию глауберовских ко.

Решение уравнений (33) находится элементарно

$$z(\tau) = z e^{-i\omega(\tau-t_0)}, \quad \bar{z}(\tau) = \bar{z} e^{i\omega(\tau-t_0)}.$$

Откуда находим виковский символ оператора эволюции $U(t) = \exp[-i\omega t \hat{a} + \hat{a}]$, в виде $\mathcal{U}(z, \bar{z}|t, t_0) = \exp\{z\bar{z} e^{-i\omega(t-t_0)}\}$.

Задача II6. Найти виковский символ оператора эволюции: а) квантового осциллятора, взаимодействующего с внешней классической силой; б) осциллятора с параметрически изменяющейся частотой; в) системы связанных осцилляторов.

Указание: Учесть, что во всех этих случаях интеграл по траекториям для символа оператора эволюции имеет гауссов вид, поэтому можно использовать приближение стационарной фазы.

В случае системы фермионов развиты [57, 58, 70, 77] аналогичные методы, использующие "фермионные" когерентные состояния, однако соответствующие комплексные переменные z^α, \bar{z}^β должны считаться антикоммутирующими (более точно, образующими алгебры Грассмана).

Как мы увидим ниже, если для системы фермионов известна динамическая группа, то согласно развиваемому здесь подходу, можно построить континуальный интеграл, не прибегая к антикоммутирующим переменным.

§ 11г). Интеграл по траекториям в представлении когерентных состояний группы $SU(2)$

Будем рассматривать задачу об отыскании фейнмановского пропагатора для квантовой спиновой системы с гамильтонианом

$$\hat{H} = f(\hat{j}_1, \hat{j}_2, \hat{j}_3), \quad \text{где } \hat{j}_k - \text{генераторы неприводимого представления } \mathcal{D}^j \text{ группы } SU(2).$$

Напомним, что спиновое когерентное состояние имеет вид

$$\begin{aligned} |z\rangle &= \exp(\bar{z}\hat{j}_+ - z\hat{j}_-) |j, -j\rangle = \\ &= (1 + z\bar{z})^{-j} \exp(\bar{z}\hat{j}_+) |j, -j\rangle, \end{aligned} \quad (34)$$

$$j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots - \text{спин}, \quad z = \frac{\xi}{|\xi|} \operatorname{tg} |\xi|.$$

Выполняется соотношение полноты

$$\int_{\bar{C}} d\mu(z, \bar{z}) |z\rangle\langle z| = \hat{I}, \quad d\mu(z, \bar{z}) = \frac{2j+1}{2\pi i} \frac{d\bar{z} \wedge dz}{(1+z\bar{z})^2}$$

и скалярное произведение двух спиновых ко равно

$$\langle z | w \rangle = [(1+z\bar{z})(1+w\bar{w})]^{-j} (1+z\bar{w})^{2j}$$

Отсюда легко находим воспроизводящее ядро

$$K(z, \bar{w}) = (1+z\bar{w})^{2j} \quad (35)$$

и $\mathcal{Z} = jz/(1+z\bar{z})$, $\bar{\mathcal{Z}} = j\bar{z}/(1+z\bar{z})$.

Поэтому ковариантный символ оператора эволюции спиновой системы принимает вид

$$\mathcal{U}(z, \bar{z} | t, t_0) = \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}\right) \prod_{t_0 \leq \tau \leq t} d\mu(z(\tau), \bar{z}(\tau)), \quad (36)$$

где $\mathcal{S} = \int_{t_0}^t \left\{ \frac{ikj}{1+z(\tau)\bar{z}(\tau)} [\bar{z}(\tau)\dot{z}(\tau) - z(\tau)\dot{\bar{z}}(\tau)] - \right.$

$$\left. - \mathcal{H}(z(\tau), \bar{z}(\tau) | t) \right\} d\tau + \frac{ikj}{2i} \ln \frac{1+z(t)\bar{z}(t)}{1+z(t_0)\bar{z}(t_0)}. \quad (37)$$

Здесь формулы (36), (37) отличаются от аналогичных из работ [60] тем, что действие \mathcal{S} в (36) содержит дополнительное (последнее) слагаемое и символ гамильтониана задан со сдвигом аргумента.

Если ограничиться случаем полиномиальной зависимости гамильтониана от генераторов группы $SU(2)$, то вычисление символа $\mathcal{K}(z, \bar{z})$ сведется к расчету матричных элементов степеней и произведений генераторов \hat{J}_3 , \hat{J}_+ , \hat{J}_- .

Задача II.7. Проверить следующие соотношения

$$\begin{aligned} \langle z | \hat{J}_+ | z \rangle &= 2jz/(1+z\bar{z}), \\ \langle z | \hat{J}_- | z \rangle &= 2j\bar{z}/(1+z\bar{z}), \\ \langle z | \hat{J}_3 | z \rangle &= -j(1-z\bar{z})/(1+z\bar{z}), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\langle z | \hat{J}_+^2 | z \rangle = 2j(2j-1) [z/(1+z\bar{z})]^2,$$

$$\langle z | \hat{J}_-^2 | z \rangle = 2j(2j-1) [\bar{z}/(1+z\bar{z})]^2,$$

$$\langle z | \hat{J}_- \hat{J}_+ | z \rangle = 2j(2jz\bar{z} + 1)/(1+z\bar{z}),$$

$$\langle z | \hat{J}_+ \hat{J}_- | z \rangle = 2j(2j + z\bar{z})z\bar{z}/(1+z\bar{z})^2,$$

$$\langle z | \hat{J}_3^3 | z \rangle = [j^2(1-z\bar{z})^2 + 2jz\bar{z}]/(1+z\bar{z})^2.$$

Остановимся вначале на классических уравнениях движения, определяющих квазиклассическую асимптотику интеграла (36). Зная вид воспроизводящего ядра $K(z, \bar{w})$ (формула (35)), находим, что однородное пространство $U(1) \setminus SU(2) \approx \mathbb{C}$, точки которого нумеруют спинорные координаты, является пространством Кэлера с 2-формой

$$\omega^2 = \frac{i \cdot j}{(1+z\bar{z})^2} dz \wedge d\bar{z}.$$

Скобка Пуассона определяется следующим образом

$$\{f_1, f_2\}(z, \bar{z}) = \frac{i(1+z\bar{z})^2}{2j\hbar} \left[\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}} \right] \quad (38)$$

Задача II.8. Показать, что ковариантные символы операторов \hat{J}_3 , \hat{J}_+ (см. формулы (37)) удовлетворяют алгебре Ли группы $SU(2)$ со скобкой Ли, определенной формулой (38).

Классические уравнения имеют вид

$$\dot{z} = -\frac{i\hbar(1+z\bar{z})}{2j} \frac{\partial \mathcal{H}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}}, \quad \dot{\bar{z}} = \frac{i\hbar(1+z\bar{z})}{2j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}. \quad (39)$$

Легко увидеть, что уравнения (39) являются каноническими по отношению к скобке Пуассона (38). Можно также проверить, что (39) являются обобщением обычных канонических уравнений движения в комплексных переменных

$$\dot{z} = -\frac{i}{\hbar} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{z}}, \quad \dot{\bar{z}} = \frac{i}{\hbar} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z},$$

которые получаются из (39) в результате сжатия группы $SU(2)$ в группу Гайзенберга-Вейля. Если вместо комплексных переменных z, \bar{z} использовать углы θ, φ на двумерной сфере $U(1) \setminus SU(2) \approx \mathbb{C} \approx S_2$, то скобка Пуассона (38) переходит в следующую

$$\{f_1, f_2\}(\theta, \varphi) = \frac{1}{j\hbar \sin\theta} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \frac{\partial f_2}{\partial \theta} - \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \right) \quad (38a)$$

(здесь $z = e^{-i\varphi} \tan \theta/2$).

Таким образом, классическим аналогом для квантовой спиновой системы является динамика с фазовым пространством в виде двумерной сферы.

Рассмотрим два примера:

1). Частица со спином j во внешнем магнитном поле

Такая задача изучалась уже нами в § 6а. Гамильтониан здесь линейен по операторам \hat{J}_3, \hat{J}_{\pm}

$$\hat{H} = \hbar [b_0(t) \hat{J}_3 + \bar{a}(t) \hat{J}_+ + a(t) \hat{J}_-] \quad (40)$$

(магнитное поле изменяется как по величине, так и по направлению).

Задача II 9. Пользуясь формулами (37), найти символ гамильтониана (40) и проверить, что классические уравнения (39) в этом случае совпадают с точными уравнениями, определяющими эволюцию спинового кс (точная квазиклассика)

$$i \dot{z} = a(t) + b_0(t) z - \bar{a}(t) z^2, \quad (39a)$$

$$-i \dot{\bar{z}} = \bar{a}(t) + b_0(t) \bar{z} - a(t) \bar{z}^2.$$

Поскольку нашей целью здесь является иллюстрация метода интегралов по траекториям, ограничимся задачей о частице со спином в однородном и постоянном магнитном поле, направленном вдоль оси X_3 ,

$\hat{H} = -\hbar \omega_0 \hat{J}_3$. Уравнения (39a) тогда упрощаются

$$-i \dot{z} = \omega_0 z, \quad +i \dot{\bar{z}} = \omega_0 \bar{z}$$

Граничные условия для нахождения классической (экстремальной) орбиты имеют вид: $z(t_0) = z, \bar{z}(t) = \bar{z}$.

Решения здесь очевидны

$$z(\tau) = z e^{+i\omega_0(\tau-t_0)}, \quad \bar{z}(\tau) = \bar{z} e^{-i\omega_0(\tau-t_0)}$$

Задача 120. Вычислить квазиклассический пропагатор \mathcal{U} кв.кл. при помощи метода стационарной фазы и сравнить его с точным пропагатором (ковариантным символом оператора эволюции $\hat{U}(t) = \exp[-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}] = \exp[i\omega_0(t-t_0)\hat{J}_z]$, который равен

$$\mathcal{U}(z, \bar{z} | t, t_0) = e^{-ij\omega_0(t-t_0)} [1 + z\bar{z} e^{i\omega_0(t-t_0)}]^{2j}$$

Указание: При подсчете континуального интеграла (36) методом стационарной фазы использовать конкретизацию на спиновый случай формул (23)–(25) и перейти к декартовым координатам $z = x + iy$ на комплексной плоскости \mathbb{C} .

Обобщенное квазиклассическое условие квантования* (29) записывается для динамики в пространстве $U(1) \setminus SU(2) = \mathbb{C}$ следующим образом:

$$4j \oint_{\Sigma} \frac{d\operatorname{Re} z d\operatorname{Im} z}{(1 + z\bar{z})^2} = (2n + \frac{\nu}{2})\pi, \quad (41)$$

ν – число фокальных точек на классической орбите Γ .

В случае частицы со спином в постоянном магнитном поле – классические орбиты являются окружностями на комплексной плоскости, поэтому квазиклассические уровни энергии легко находятся. В самом деле, здесь Σ – круг с центром в начале координат, радиус которого r определяется условием:

$$\mathcal{H}(z, \bar{z}) = \hbar j \omega_0 (1 - z\bar{z}) / (1 + z\bar{z}) = E \quad \text{т.е.}$$

$$r = \sqrt{(\hbar j \omega_0 - E) / (\hbar j \omega_0 + E)}$$

Число фокальных (поворотных) точек на окружности равно $\nu = 2$ [80]. (К этому же результату можно прийти, подсчитав число сингулярностей функции \mathcal{U} , которая возникает при отыскании квазиклассического пропагатора из задачи 120 [60].

Интегрируя в (41) по кругу радиуса $r = r(E)$, находим следующее квантование энергии спина

$$E_n = \hbar \omega_0 [j - (n + \frac{1}{2})] \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2j. \quad (42)$$

n - пробегает конечное число $2j+1$ значений из-за того, что площадь круга $\sum \leq 4\pi$ (напомним, что на комплексной плоскости \mathbb{C} у нас задана неевклидова метрика и \mathbb{C} - компактное пространство: $\mathbb{C} = S_2$).

Из (42) видно, что квазиклассический результат отличается от точного сдвигом всех уровней на $-\hbar \omega_0/2$. Правильный результат получается, если в (42) выполнить замену $j \rightarrow j + \frac{1}{2}$, которая допустима в пределе большой величины спина j (хорошо известно, что квазиклассика работает для больших квантовых чисел).

2). Асимметричный волчок

Применим построенный интеграл по траекториям к изучению вращения абсолютно твердого тела вокруг закрепленной точки, совпадающей с центром масс.

Хорошо известно, см., например [2,80], что классическая энергия вращения твердого тела выражается формулой

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} \right), \quad (43)$$

где I_1, I_2, I_3 - главные моменты инерции, а L_1, L_2, L_3 - проекции момента количества движения на оси, жестко связанные с твердым телом и направленные вдоль главных осей его тензора моментов инерции. Если $I_1 \neq I_2 \neq I_3$, то такая система называется асимметричным волчком.

Квантовый гамильтониан получается из (43) заменой классических величин L_1, L_2, L_3 соответствующими квантовыми операторами

$$\hat{L}_1 = \hbar \hat{J}_1, \quad \hat{L}_2 = \hbar \hat{J}_2, \quad \hat{L}_3 = \hbar \hat{J}_3,$$

которые должны удовлетворять перестановочным соотношениям группы вращений, но с измененными знаками всех коммутаторов [2]

$$[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = -i \hat{J}_3, \quad [\hat{J}_2, \hat{J}_3] = -i \hat{J}_1, \quad [\hat{J}_3, \hat{J}_1] = -i \hat{J}_2,$$

поскольку они определены во внутренней (жестко связанной с твердым телом) системе координат. Итак, квантовый гамильтониан асимметричного волчка задан формулой

$$\hat{H} = \hbar^2 \sum_{k=1}^3 \frac{\hat{J}_k^2}{2 I_k} \quad (44)$$

Ковариантный символ гамильтониана (44) по спиновым когерентным состояниям $|z\rangle$ складывается теперь из классической части $\mathcal{H}_{\text{кл}}$ и поправки, учитывающей квантовые флуктуации, т.е. [60]

$$\mathcal{H}(z, \bar{z}) = \langle z | \hat{H} | z \rangle = \mathcal{H}_{\text{кл}} + \Delta \mathcal{H}, \quad (45)$$

$$\mathcal{H}_{\text{кл}} = \frac{\hbar^2}{2} \sum_K \frac{\langle \hat{J}_K \rangle^2}{I_K}, \quad \Delta \mathcal{H} = \frac{\hbar^2}{2} \sum_K \frac{(\Delta \hat{J}_K)^2}{I_K}$$

Используя формулы (37), можно увидеть, что флуктуационные поправки $\Delta \hat{J}_K$ порядка $1/j$ по сравнению с $\langle \hat{J}_K \rangle$.

Если угловой момент велик $j \hbar \gg \hbar$, то квазиклассическое приближение является хорошим, и можно в рамках его точности, записать классические уравнения, учитывая в (45) только слагаемое $\mathcal{H}_{\text{кл}}$. Выпишем эти уравнения в угловых переменных θ, φ .

Пользуясь формулами (37), находим, что средние значения операторов \hat{J}_K по спиновым кс в (θ, φ) — представлении равны (необходимо учесть отличие в знаках коммутаторов операторов \hat{J}_K во внутренней системе координат)

$$\begin{aligned} \langle \hat{J}_1 \rangle &= j \sin \theta \cos \varphi, & \langle \hat{J}_2 \rangle &= -j \sin \theta \sin \varphi, \\ \langle \hat{J}_3 \rangle &= j \cos \theta. \end{aligned} \quad (46)$$

Эти формулы приводят к $\mathcal{H}_{\text{кл}}$ в виде

$$\mathcal{H}_{\text{кл}} = j^2 \hbar^2 \left(\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{2 I_1} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{2 I_1} + \frac{\cos^2 \theta}{2 I_3} \right), \quad (47)$$

Подставляя $\mathcal{H}_{\text{кл}}$ в уравнение движения

$$\dot{\theta} = \{ \theta, \mathcal{H} \}, \quad \dot{\varphi} = \{ \varphi, \mathcal{H} \},$$

где скобка Пуассона имеет вид (38а), но с противоположным знаком, получаем

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -j\hbar \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) \sin\theta \sin\varphi \cos\varphi \\ \dot{\varphi} &= -j\hbar \left(\frac{1}{I_1} \cos^2\varphi + \frac{1}{I_2} \sin^2\varphi - \frac{1}{I_3} \right) \cos\theta.\end{aligned}\quad (48)$$

Эти уравнения приводятся к известным уравнениям Эйлера для асимметричного волчка [80]

$$\begin{aligned}I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_3, \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1, \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2,\end{aligned}\quad (49)$$

если ввести угловые скорости $\omega_K = \frac{\hbar \langle \hat{J}_K \rangle}{I_K}$, $K = 1, 2, 3$.

Кратко остановимся на соответствии между классическими уравнениями движения (48), (49) и Гайзенберговскими уравнениями движения для квантовых операторов $\hat{\omega}_K = (\hbar/I_K) \hat{J}_K$

Мы имеем

$$I_1 \dot{\hat{\omega}}_1 = \frac{1}{i\hbar} [I_1 \hat{\omega}_1, \hat{H}] = (I_2 - I_1) \frac{1}{2} (\hat{\omega}_2 \hat{\omega}_3 + \hat{\omega}_3 \hat{\omega}_2), \quad (50)$$

остальные получаются из (50) циклической перестановкой индексов (1, 2, 3). В последнем слагаемом уравнения (50) учтена некоммутативность операторов $\hat{\omega}_2, \hat{\omega}_3$.

Для определения (50) "квантованием" классических уравнений, мы должны задать коммутационные соотношения между компонентами вектора угловой скорости. Из (46) учитывая, что скобка Пуассона функцией на сфере определена формулой (38а) (с противоположным знаком), находим

$$\{ \langle \hat{J}_1 \rangle, \langle \hat{J}_2 \rangle \} = - \langle \hat{J}_3 \rangle. \quad (51)$$

Поэтому правило квантования должно иметь стандартный вид

$$\{ f_1, f_2 \} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}_1, \hat{f}_2]$$

11д). Модель Липкина-Мешкова

Еще одной достаточно простой, но нетривиальной задачей, в ко-

торой гамильтониан может быть записан в виде функции генераторов группы $SU(2)$, является модель Липкина-Мешкова [90, 64, 91].

Рассмотрим модельную систему N фермионов, с двухчастичным взаимодействием. Предположим, что фермионы распределены по двум уровням, каждый из которых имеет N -кратное вырождение. Фермионные операторы рождения и уничтожения имеют тогда два индекса: индекс δ нумерует уровни и принимает значения ± 1 , а индекс p нумерует вырожденные состояния на каждом уровне. Легко подсчитать, что размерность пространства состояний в этом случае равна 2^N . Гамильтониан запишем в виде

$$\hat{H} = \frac{\epsilon}{2} \sum_{\substack{p=1, \dots, N \\ \delta=\pm 1}} \delta \hat{a}_{p\delta}^+ \hat{a}_{p\delta} - \frac{V}{2} \sum_{\substack{p, p'=1, \dots, N \\ \delta=\pm 1}} \hat{a}_{p\delta}^+ \hat{a}_{p'\delta} \hat{a}_{p'\delta} \hat{a}_{p-\delta}. \quad (52)$$

Операторы $\hat{a}_{p\delta}$, $\hat{a}_{p'\delta'}^+$ удовлетворяют антикоммутационным соотношениям

$$[\hat{a}_{p\delta}, \hat{a}_{p'\delta'}^+]_+ = \delta_{pp'} \delta_{\delta\delta'}. \quad (53)$$

Первое слагаемое в (52) имеет смысл суммы одночастичных энергий, а второе описывает двухчастичные взаимодействия. Такая модель использовалась в [90] при описании парных корреляций нуклонов в ядрах (сверхтекучая модель ядра).

В (52) предполагается, что потенциал взаимодействия, с которым две частицы в одной оболочке рассеиваются друг на друге, не зависит от "магнитного" квантового числа p . Это приводит к дополнительной симметрии гамильтониана и позволяет упростить задачу.

Введем квазиспиновые операторы

$$\begin{aligned} \hat{J}_+ &= \sum_p \hat{a}_{p1}^+ \hat{a}_{p,-1}, \quad \hat{J}_- = (\hat{J}_+)^+ = \sum_p \hat{a}_{p,-1}^+ \hat{a}_{p1}, \\ \hat{J}_3 &= \frac{1}{2} \sum_{p,\delta} \delta \hat{a}_{p\delta}^+ \hat{a}_{p\delta}. \end{aligned} \quad (54)$$

Антикоммутационные соотношения (53) обеспечивают справедливость для операторов (54) стандартных коммутационных соотношений группы $SU(2)$. В результате гамильтониан принимает вид

$$\hat{H} = \epsilon \hat{J}_3 - \frac{V}{2} (\hat{J}_+^2 + \hat{J}_-^2). \quad (55)$$

Если константа двухчастичного взаимодействия $V = 0$, то (55) сводится к гамильтониану "частицы со спином" во внешнем постоянном магнитном поле.

Оператор \hat{H} коммутирует с $\hat{J}^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2$, поэтому может быть диагонализирован в неприводимом представлении D^j группы $SU(2)$ размерности $2j+1$. Из (54) ясно, что \hat{J}_3 определяется разностью числа частиц в верхнем ($\beta=+1$) и нижнем ($\beta=-1$) состояниях. Отсюда наибольшее собственное значение J_3 а следовательно, и максимальное значение j равно $N/2$.

Будем рассматривать некоторое фиксированное значение $j \leq N/2$. Используя явный вид матричных элементов $\hat{J}_3, \hat{J}_+^2, \hat{J}_-^2$ (формулы (37)), находим ковариантный символ гамильтониана (55)

$$\mathcal{H}(z, \bar{z}) = - \frac{\varepsilon j (1 - z \bar{z})}{1 + z \bar{z}} - \frac{V j (2j-1)}{(1 + z \bar{z})^2} (z^2 + \bar{z}^2). \quad (56)$$

Символ оператора эволюции для гамильтониана (55) приобретает вид

$$\mathcal{U}(z, \bar{z} | t, t_0) = \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S \right\} \prod_{t_0 \leq \tau < t} \frac{2j+1}{2\pi i} \frac{d\bar{z}(\tau) \wedge dz(\tau)}{(1 + z(\tau) \bar{z}(\tau))^2}, \quad (57)$$

где

$$S = \int_{t_0}^t \left\{ \frac{i \hbar j}{1 + z \bar{z}} [\bar{z} \dot{z} - z \dot{\bar{z}} + \frac{\varepsilon (1 - z \bar{z})}{i \hbar}] + \frac{V j (2j-1)}{(1 + z \bar{z})^2} (z^2 + \bar{z}^2) \right\} d\tau + \frac{\hbar j}{i} \ln \frac{1 + z(t) \bar{z}(t)}{1 + z(t_0) \bar{z}(t_0)} \quad (58)$$

Квазиклассические уравнения движения выглядят здесь следующим образом [92]

$$\begin{aligned} \dot{z} &= - \frac{i}{\hbar} \left\{ \varepsilon z - \frac{V(2j-1)}{1 + z \bar{z}} (\bar{z} - z^3) \right\}, \\ \dot{\bar{z}} &= \frac{i}{\hbar} \left\{ \varepsilon \bar{z} - \frac{V(2j-1)}{1 + z \bar{z}} (z - \bar{z}^3) \right\}. \end{aligned} \quad (59)$$

Граничные условия стандартны: $z(t_0) = z$, $\bar{z}(t) = \bar{z}$.

Уравнения (59) не разрешаются через элементарные функции. Если использовать угловую параметризацию спиновых ко, то уравнения

$$(59) \quad \text{и} \quad [64] \\ \text{рассмотрим моды } -1) \sin \theta \sin 2\varphi, \\ \text{действием.} \quad + \chi \cos \theta \cos 2\varphi),$$

(60)

$$\chi = \frac{V}{\epsilon} (2j-1).$$

В представленной форме можно записать аналитические решения через эллиптические функции Якоби, однако эти точные решения являются мало информативными. Поэтому для интегрирования уравнений (56) и (60) полезно использовать численные методы.

В дипломной работе Е.А.Яковлевой был проведен численный расчет уравнений (59) в декартовых координатах ($z = x + iy$) на комплексной плоскости. Построенные решения согласуются с найденными траекториями на сфере в [64].

Задача 121. Показать, что (59) и (60) эквивалентны "уравнениям Эйлера" для ковариантных символов \mathcal{F}_k операторов $\hat{\mathcal{J}}_k$ ($k = 1, 2, 3$)

$$\dot{\mathcal{F}}_k = \{ \mathcal{F}_k, \mathcal{H} \} \quad (61)$$

Для $j \gg 1$ уравнения (61) можно упростить, заменив точный ковариантный символ $\mathcal{H}(z, \bar{z})$ из (56) классической функцией Гамильтона

$$\mathcal{H}_{kl}(z, \bar{z}) = \epsilon \mathcal{F}_3(z, \bar{z}) - \frac{2j-1}{2j} V(\mathcal{F}_1^2 - \mathcal{F}_2^2) \quad (62)$$

(пренебрегаем квантовыми флуктуациями, т.е. полагаем $\langle \hat{\mathcal{J}}^2 \rangle = \langle \hat{\mathcal{J}}_k^2 \rangle = \mathcal{F}_k^2(z, \bar{z})$). \mathcal{H}_{kl} отличается от \mathcal{H} слагаемыми порядка $1/j$. После этого уравнения движения для \mathcal{F}_k принимают форму

$$\dot{\mathcal{F}}_k = \{ \mathcal{F}_k, \mathcal{H}_{kl} \}$$

и явно выглядят следующим образом

$$\dot{\mathcal{F}}_1 = \epsilon [-\mathcal{F}_2 + (\chi/j) \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_3],$$

(63)

$$\dot{z}_2 = \epsilon [z_1 + (\chi/j) z_1 z_2],$$

$$\dot{z}_3 = \epsilon (\chi/j) [-2 z_1 z_2]$$

Отметим интересную аналогию между уравнениями (63) модели Липкина-Мешкова и (49), описывающими асимметрический волчок.

Уравнения (63) необходимо дополнить очевидными условиями

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z^2 = \text{const} \quad (64)$$

$$\mathcal{H}_{KL} = \epsilon [z_3 - (\chi/2j)(z_1^2 - z_2^2)] = E = \text{const} \quad (65)$$

Поэтому решения уравнений (63) можно искать численными методами как траекторию, заданную пересечением поверхностей (64) и (65) в трехмерном евклидовом пространстве. Поверхность (64) является сферой, а (65) — параболический гиперboloид сдвинутый на ϵ от начала координат вдоль оси z_3 .

Имеется два возможных типа движения, в зависимости от параметра χ

а) $\chi < 1$

Кривизна вершин параболического гиперboloид в плоскостях z_3, z_1 и z_3, z_2 равна $\pm \chi/j$. Для сферы кривизна равна $1/j$, так что кривизна параболы, меньше, чем сферы. Изменяя E/ϵ , находим первое пересечение для $E/\epsilon = j$ (северный полюс) и последнее — для $E/\epsilon = -j$ (южный полюс). Все остальные траектории обходят один раз вокруг оси z_3 (см. рис. I)

б) $\chi > 1$.

Здесь кривизна параболического гиперboloид больше чем сферы, поэтому первое пересечение вырождается в точку и определяется уравнением $\cos \theta = 1/\chi$ и значением энергии $E/\epsilon = j(\chi^2 + 1)/2\chi > j$.

С уменьшением энергии пересечение дает замкнутые траектории вокруг θ_0 с растущей "амплитудой" до тех пор пока E/ϵ не станет равным j . В этом случае вершина параболы касается северного полюса и траектории начинают обходить ось z_3 как и в предыдущем случае. Для отрицательных энергий справедлива аналогичная ситуация (см. рис. 2).

2). Возможные границы изменения энергии: $-\frac{\chi^2+1}{2\chi} \cdot j < \frac{E}{\epsilon} < \frac{\chi^2+1}{2\chi} \cdot j$, внутри этих границ "вращающиеся" решения — траектории вокруг оси z_3

лежат в границах $-j < \frac{E}{\epsilon} < j$ и "деформированные" решения в области $j < |\frac{E}{\epsilon}| < j \frac{\chi^2+1}{\chi}$. (В деформированной области для каждой энергии имеется две возможные траектории).

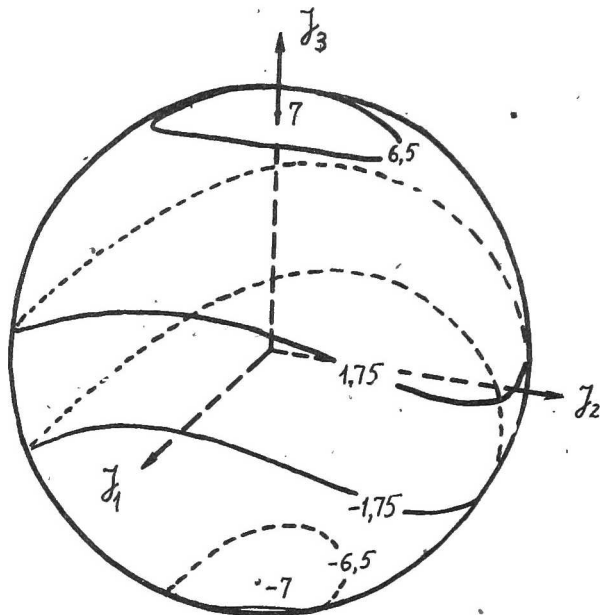


Рис. I

Классические траектории модели Липкина для $N = 2j = 14$ и $\chi = 0,5$. Числа на кривых означают соответствующие энергии

В классике E непрерывно меняется в указанной области, однако с учетом квазиклассического условия квантования (41) отображается конечное число орбит.

Остановимся еще на одном интересном вопросе, связанном с моделью Липкина-Мешкова, который был разобран в работах Гилмора и Фенга [91].

В этих работах исследовалось поведение ядерной материи, описываемой гамильтонианом, имеющим более общий вид, по сравнению с (52)

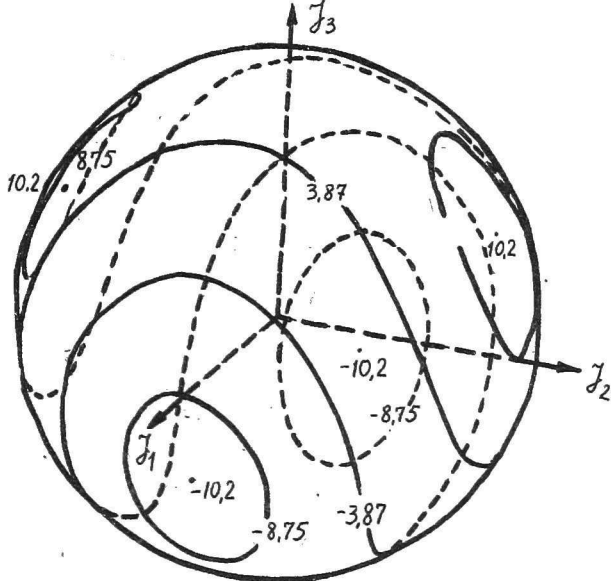


Рис. 2

Классические траектории для модели Липкина ($N=2j=14$; $\chi=2,5$)

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \epsilon \sum_{p,s} \hat{a}_{ps}^+ \hat{a}_{ps} + \frac{1}{2} V \sum_{p,p',s} \hat{a}_{ps}^+ \hat{a}_{p's}^+ \hat{a}_{p'-s} \hat{a}_{p-s} + \frac{1}{2} W \sum_{p,p',s} \hat{a}_{ps}^+ \hat{a}_{p's}^+ \hat{a}_{p'-s} \hat{a}_{p-s} \quad (65)$$

и после введения квазиспиновых операторов

$$\hat{H} = \epsilon \hat{J}_3 + \frac{1}{2} V (\hat{J}_+^2 + \hat{J}_-^2) + \frac{1}{2} W (\hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+). \quad (66)$$

Гилмор и Фенг показали, что с гамильтонианом (66) в пределе большого числа частиц связаны два ядерных фазовых перехода: 1) фазовый переход в основном энергетическом состоянии и 2) термодинамический фазовый переход.

Фазовый переход в основном энергетическом состоянии заключается в следующем: в отсутствии взаимодействия, основное ядерное состояние является сферически симметричным ($j = N/2$, $m = -j$). С ростом параметров взаимодействия V и W в (66) ядерная оболочка деформируется, если основному состоянию больше не соответствует $m = -j$.

Если же некоторым образом ядро, содержащее очень большое число нуклонов, возбуждается, то прежде чем произойдет переход в основное состояние, ядро "термолизуется", что позволяет ввести "ядерную температуру" и свободную энергию. В [91] было показано, что при очень высоких температурах ядро сферически симметрично, с уменьшением же температуры возможен фазовый переход от сферически симметричного к деформированному ядру (фазовый переход 2-го рода, который сопровождается нарушением сферической симметрии). Была доказана также теорема, утверждающая, что если ядерное основное состояние испытывает фазовый переход от сферического к деформированному с ростом ядерных параметров взаимодействия, то в системе совершается термодинамический фазовый переход из деформированного в сферическое с ростом ядерной температуры.

Выводы работ [91] основаны на применении неравенств Либа-Березина [23, 93] для квантовой статистической суммы

$$\int d\mu_j(z, \bar{z}) e^{-\beta \mathcal{H}_Q(z, \bar{z})} \leq Z_q \leq \int d\mu_j(z, \bar{z}) e^{-\beta \mathcal{H}_P(z, \bar{z})}, \quad (67)$$

где $Z_q := \text{Sp exp}(-\beta \hat{H})$, \mathcal{H}_Q - ковариантный, а \mathcal{H}_P - контравариантный символы гамильтониана (66) $d\mu_j(z, \bar{z}) = \frac{j+1}{2\pi i} \frac{d\bar{z} \wedge dz}{(1+\bar{z}\bar{z})^2}$. (Заметим, в [92] использовалась угловая параметризация спинных кс). В пределе при $\beta \rightarrow \infty$ неравенство (67) переходит в следующее

$$\min_z \{ \mathcal{H}_P \} \leq E_0 \leq \min_z \{ \mathcal{H}_Q \}, \quad (68)$$

где E_0 - энергия основного состояния.

На основе численного изучения этого неравенства Гилмор и Фент показали, что $\min \{ \mathcal{H}_Q \}$ является очень хорошим приближением для E_0 в случае больших j . В пределе $j \rightarrow \infty$ точное квантовое основное состояние может быть найдено минимизацией классического выражения $\mathcal{H} = \mathcal{H}_Q / j$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (E_0 / j) = \min_z \{ \tilde{\mathcal{H}}(z, \bar{z}) \}. \quad (69)$$

К аналогичному выводу можно придти, исследуя в термодинамическом пределе представление статистической суммы Z_q в виде интеграла по траекториям (напомним, что статистическая сумма является

аналитическим продолжением ($t \rightarrow -i\hbar\beta$) так называемой спектральной функции

$$Y(t) = Sp \exp\left(-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}\right) \quad (70)$$

В термодинамическом пределе при вычислении континуального интеграла метод стационарной фазы дает точный ответ и в результате приходим к (69).

Метод, примененный в [91] является одним из вариантов популярной в настоящее время в приложениях теории катастроф (см., например, [94]).

В работах [64, 95, 96] изучались обобщения модели Липкина-Мешкова. В [64, 95] проведено рассмотрение нуклонных систем с m частицами и n дырками, которое использовало технику динамической группы $U(m+n)$ и интегралы по траекториям на пространстве Грассмана $U(m) \times U(n) \subset U(m+n)$, были выведены классические уравнения движения (без учета парных корреляций). В [96] анализировалась многофермионная система с учетом парных корреляций. Был использован тот факт, что из фермионных операторов N сортов $[\hat{C}_\alpha, \hat{C}_\beta^\dagger]_+ = \delta_{\alpha\beta}$; $\alpha, \beta = 1, \dots, N$, можно сконструировать билинейные комбинации, являющиеся генераторами группы $SO(2N)$ — группы линейных канонических преобразований, сохраняющих антикоммутационные соотношения. Классическим аналогом такой системы фермионов является динамика в фактор-пространстве $U(N) \setminus SO(2N)$.

Отметим, что и здесь нет необходимости в использовании антикоммутирующих классических переменных, как это делалось, например, в [58].

§ IIe). Интегралы по траекториям в случае динамической группы $\widetilde{SU}(1,1)$

В качестве последнего примера построения фейнмановских пропагаторов в представлении когерентных состояний на группах Ли будем изучать квантовые системы с динамической группой $\widetilde{SU}(1,1)$. Как мы уже знаем, такая группа появляется во многих интересных физических задачах: гармонический осциллятор, сингулярный осциллятор, сверхтекучий бозе-газ, осциллятор Морзе и атом водорода. Динамическая группа $\widetilde{SU}(1,1)$ использовалась также для построения повышающих и понижающих операторов для релятивистского осцил-

лятора в квазипотенциальном подходе.

Кратко напомним свойства системы кс для унитарных представлений дискретной серии представлений T_+^k группы $SU(1,1)$ [13]. Коммутационные соотношения алгебры Ли $SU(1,1)$ имеют вид

$$\begin{aligned} [\hat{K}_0, \hat{K}_{\pm}] &= \pm \hat{K}_{\pm}, \quad [\hat{K}_+, \hat{K}_-] = -2\hat{K}_0, \\ (\hat{K}_+ &= \hat{K}_1 + i\hat{K}_2, \quad \hat{K}_- = \hat{K}_1 - i\hat{K}_2). \end{aligned} \quad (71)$$

Оператор Казимира

$$\begin{aligned} \hat{K}^2 &= \hat{K}_0^2 - \hat{K}_1^2 - \hat{K}_2^2 = \\ &= \hat{K}_0^2 - \frac{1}{2} (\hat{K}_+ \hat{K}_- + \hat{K}_- \hat{K}_+) = k(k-1) \hat{I} \end{aligned} \quad (72)$$

В представлении положительной дискретной серии T_+^k базис образован собственными векторами операторов \hat{K}_0 и \hat{K}^2

$$\hat{K}_0 |k, n\rangle = (k+n) |k, n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (73)$$

Когерентные состояния определены формулой

$$|z\rangle = (1 - z\bar{z})^k e^{\bar{z}\hat{K}_+} |k, 0\rangle, \quad (74)$$

$z \in \mathcal{D} \equiv \{|z| < 1\}$ - точка круга единичного радиуса \mathcal{D}

Скалярное произведение двух кс равно

$$\langle z | w \rangle = (1 - z\bar{z})^k (1 - w\bar{w})^k (1 - z\bar{w})^{-2k} \quad (75)$$

Выполняется разложение единицы

$$\hat{I} = \int d\mu_k(z, \bar{z}) |z\rangle \langle z|, \quad (76)$$

где $d\mu_k(z, \bar{z}) = \frac{2k-1}{2\pi i} \frac{d\bar{z} \wedge dz}{(1 - z\bar{z})^2}$, $(k \neq \frac{1}{2})$ - инвариантная мера на \mathcal{D} - модели Пуанкаре плоскости Лобачевского. Если $k = \frac{1}{2}$, то [97]

$$d\mu_{\frac{1}{2}}(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\bar{z} \wedge dz}{(1 - z\bar{z})^2}.$$

(Для $k = \frac{1}{2}$ интеграл в (76) расходится, чтобы обойти эту трудность, запишем этот интеграл как [97]:

$$\langle 0 | \hat{I} | 0 \rangle = 1 = \frac{|2k-1|}{2\pi i} \int \frac{d\bar{z} \Lambda dz}{(1-z\bar{z})^2} (1-z\bar{z})^{|2k-1|+1},$$

т.е. сделаем замену $2k \rightarrow |2k-1|+1$).

Последнее замечание позволяет работать с системой ко вида (74) и в случае одномерного осциллятора, где ([18] и § 3 часть I)

$$k = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}. \quad \hat{K}_+ = \frac{1}{4} \hat{a} + \hat{a}^+, \quad \hat{K}_- = \frac{1}{4} \hat{a} \hat{a}, \quad \hat{K}_0 = \frac{1}{4} (\hat{a} + \hat{a}^+ + \hat{a} \hat{a}^+).$$

Из формулы (76) следует выражение для воспроизводящего ядра

$$K(z, \bar{w}) = (1 - z \bar{w})^{-2k} \quad (77)$$

Откуда, легко получаем величины \mathcal{Z} и $\bar{\mathcal{Z}}$ необходимые для записи интеграла по траекториям.

$$\mathcal{Z} = -k z (1 - z \bar{z})^{-1}, \quad \bar{\mathcal{Z}} = -k \bar{z} (1 - z \bar{z})^{-1} \quad (78)$$

Действуя аналогично выводу формул (I4), (I5) приходим к интегралу по траекториям для квантовой системы с гамильтонианом

$$\hat{H} = f(\hat{K}_0, \hat{K}_+, \hat{K}_-), \quad (79)$$

динамической группой которого является $\widetilde{SU}(1,1)$ при условии, что операторы K_0, K_{\pm} реализуют представление T_+^k :

$$\mathcal{U}(z, \bar{z}; t, t_0) = \int e^{\frac{i}{k} S} \prod_{t_0 < \tau < t} d\mu_k(z(\tau), \bar{z}(\tau)), \quad (80)$$

где

$$S = \int_{t_0}^t \left\{ -i k k \frac{\bar{z} \dot{z} - z \dot{\bar{z}}}{1 - z \bar{z}} - \mathcal{H}(z(\tau), \bar{z}(\tau) | \tau) \right\} d\tau +$$

$$+ \frac{k k}{i} \ln \frac{1 - z(t_0) \bar{z}(t_0)}{1 - z(t) \bar{z}(t)} \quad (81)$$

Оценивая интеграл (80) по методу стационарной фазы, приходим к классическим уравнениям движения на плоскости Лобачевского

$$\dot{z} = i \frac{(1 - z \bar{z})^2}{2 k k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{z}}, \quad \dot{\bar{z}} = -i \frac{(1 - z \bar{z})^2}{2 k k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} \quad (82)$$

Эти уравнения являются каноническими, т.е.

$$\dot{z} = \{z, \mathcal{H}\}, \quad \dot{\bar{z}} = \{\bar{z}, \mathcal{H}\}, \quad (83)$$

если определить скобку Пуассона

$$\{f_1, f_2\}(z, \bar{z}) = \frac{(1 - z\bar{z})^2}{2ik} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}} \right),$$

выбор которой диктуется $SU(1,1)$ -инвариантной 2-формой на \mathcal{D}

$$\omega^2 = \frac{-ik}{(1 - z\bar{z})^2} dz \wedge d\bar{z} \quad (84)$$

(см. также работу Березина [98]). Если использовать угловую параметризацию $z = -e^{i\phi} \tanh(\lambda/2)$, то скобка Пуассона переписывается в виде

$$\{f_1, f_2\} = \frac{1}{k \sinh \lambda} \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \frac{\partial f_2}{\partial \phi} - \frac{\partial f_1}{\partial \phi} \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \right\} \quad (85)$$

Задача I22. Проверить, что для гармонического осциллятора ковариантный символ гамильтониана $\hat{H} = 2k\omega k_0$ равен

$$\mathcal{H}(z, \bar{z}) = 2k\omega k \operatorname{ch} \lambda \quad (86)$$

и уравнения движения есть

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \{\lambda, \mathcal{H}\} = 0, \\ \dot{\phi} &= \{\phi, \mathcal{H}\} = -2\omega. \end{aligned} \quad (87)$$

Решения (86) очевидны; $\lambda = \operatorname{const}$, $\phi = -2\omega t + \phi_0$ (в случае осциллятора переменные ϕ и λ тесно связаны с переменными и угол - действие в искривленном фазовом пространстве).

Задача I23. Вычислить ковариантный символ гамильтониана $\hat{H} = \Omega_0 \hat{K}_0 + \lambda \hat{K}_+ + \bar{\lambda} \hat{K}_-$ и показать, что в этом случае классические уравнения движения совпадают с точным уравнением, задающим эволюцию на плоскости Лобачевского

$$i\dot{z} = \lambda + \Omega_0 z + \bar{\lambda} z^2. \quad (88)$$

Этот результат согласуется с утверждением, что все линейные системы являются квазиклассическими, но только (в общем случае) в искривленном фазовом пространстве [62].

Остановимся на некоторых приложениях. Применение группы к осциллятору, сверхтекучему бозе-газу и сингулярному осциллятору мы уже изучали в ч. I и II (без привлечения техники интегрирования по траекториям), поэтому кратко рассмотрим осциллятор Морзе и нерелятивистский атом водорода.

I. Осциллятор Морзе

Осциллятором Морзе называют частицу, взаимодействующую с потенциалом

$$V(\vec{r}) = D \{ \exp[-2a(r-r_0)] - 2\exp[-a(r-r_0)] \}. \quad (89)$$

Такая задача широко используется в молекулярной спектроскопии для описания колебаний двухатомных молекул.

Уравнение Шредингера для осциллятора Морзе имеет динамическую симметрию группы $\widetilde{SU}(1,1)$ [99], причем: (рассматриваются S -состояния; $\vec{L} = 0$)

$$\begin{aligned} \hat{K}_0 &= \frac{1}{a^2 \hbar(\vec{r})} [\hat{\vec{p}}^2 - 2ME] + \frac{1}{4} \hbar(\vec{r}), \\ \hat{K}_1 &= \frac{1}{a^2 \hbar(\vec{r})} [\hat{\vec{p}}^2 - 2ME] - \frac{1}{4} \hbar(\vec{r}), \\ \hat{K}_2 &= \frac{i}{2r} (i\vec{r} \cdot \hat{\vec{p}} + 1) - \frac{i}{2}, \end{aligned} \quad (90)$$

где $\hbar(\vec{r}) = (8MD)^{1/2}/a \cdot \exp[-a(r-r_0)]$

Гамильтониан приводится к виду

$$\widetilde{H} = \frac{a^2 \hbar(r)}{2M} \left[\hat{K}_0 - \frac{6}{a} (2MD)^{1/2} \right] - E. \quad (91)$$

Уровни энергии могут быть найдены из уравнения на собственные значения

$$(\widetilde{H} - E) |\psi_n\rangle = 0. \quad (92)$$

Из (91) ясно, что можно положить $|\psi_n\rangle = |k, n\rangle$.

Заметим также, что

$$\hat{K}^2 = \hat{K}_0^2 - \hat{K}_1^2 - \hat{K}_2^2 = -\frac{2ME}{a^2} - \frac{1}{4} = k(k-1).$$

Отсюда находим уровни энергии

$$E_n = -\frac{a^2}{2M} \left[\frac{b}{a} (2MD)^{1/2} - \left(n + \frac{1}{2}\right) \right]^2, \quad (93)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots, n_{\max}$, где $n_{\max} + \frac{1}{2} \leq b(2MD/a)^{1/2}$.

Построим теперь континуальный интеграл для осциллятора Морзе вида (80), где

$$\mathcal{H}(z_k, \bar{z}_{k-1}, |t) = \frac{a^2 \hbar(z(t))}{2M} \left[k \frac{1+z_k \bar{z}_{k-1}}{1-z_k \bar{z}_{k-1}} - \frac{b}{a} (2MD)^{1/2} \right] - E$$

Следуя идее Дуру и Клайнера [100], сделаем замену времени

$$\chi s(t) = \int^t dt' \hbar(z(t')), \quad \text{если выбрать } \chi = (8MD/a)^{1/2}, \quad s -$$

- имеет размерность времени и после несложных (но громоздких) преобразований приведем интеграл по траекториям к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(z, \bar{z}|t, t_0) = & e^{-\frac{iE(t-t_0)}{\hbar}} \chi \int_{s'}^{\infty} ds \delta(t-t_0 - \int ds \frac{1}{\hbar(s)}) \frac{1}{\hbar(s)} \times \\ & \times \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\int_s^{s'} ds \tilde{\mathcal{L}}(z, z' | \bar{z}, \bar{z}') \right] \right\}, \end{aligned} \quad (94)$$

где

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{i\hbar k}{1-z\bar{z}} \left[z\bar{z}' - \bar{z}z' \right] - \frac{a^2 \chi}{2M} \left[k \frac{1+z\bar{z}}{1-z\bar{z}} \right] - \frac{b}{a} (2MD)^{1/2}$$

z' - обозначает производную по отношению к новой "временной" переменной. Видим, что если отвлечься от первых множителей в (94), то континуальный интеграл, оказывается таким же, как и в случае обычной линейной системы с гамильтонианом $H = \Omega_0 K_0 + \text{const}$, т.е. на плоскости Лобачевского осциллятор Морзе эквивалентен осциллятору.

II. Атом водорода

Хорошо известно (см. часть I и лит. литер.); что группа $SO(2,1) \approx SU(1,1)$ является генерирующей спектр группой для нерелятивистского атома водорода и является подгруппой более широкой динамической группы $SO(4,2)$. $SO(2,1)$ - подалгебра реализуется операторами

$$\hat{K}_0 = (\tau p^2 + M\tau)/2M, \quad \hat{K}_1 = (\tau p^2 - M\tau)/2M, \\ \hat{K}_2 = \vec{\tau} \cdot \vec{p} - i \quad (95)$$

Гамильтониан $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} - \frac{e^2}{\tau}$ атома водорода не может быть представлен в виде полинома по генераторам $\hat{K}_0, \hat{K}_1, \hat{K}_2$. Однако, если стационарное уравнение Шредингера умножить слева на τ , то приходим к задаче Штурма-Лиувилля

$$\tau(H-E)|\tilde{\psi}\rangle \equiv \tilde{\Omega}(E)|\tilde{\psi}\rangle \quad (96)$$

и оператор $\tilde{\Omega}(E)$ оказывается линейным

$$\tilde{\Omega}(E) = \frac{1}{2}(K_0 + K_1) - \frac{E}{M}(K_0 - K_1) - e^2$$

Оператор $\tilde{\Omega}(E)$ можно диагонализировать преобразованием вида $\tilde{\Omega}(E) \rightarrow \Omega(E)$,

где

$$\Omega(E) = e^{-i\theta(E)\hat{K}_2} \tilde{\Omega}(E) e^{i\theta(E)\hat{K}_2} \\ \theta(E) = \operatorname{arctg} \left(\frac{2E+M}{2E-M} \right), \quad E < 0 \quad (97) \\ \Omega(E) = (-2E/M)^{1/2} \hat{K}_0 - e^2,$$

При этом

$$\Omega(E)|\psi\rangle = 0 \quad (98)$$

векторы $|\psi\rangle$ и $|\tilde{\psi}\rangle$ связаны преобразованием тильта:

$$|\psi\rangle = e^{-i\theta(E)\hat{K}_2} |\tilde{\psi}\rangle \quad (99)$$

Отсюда (см. ч. I, § 3в) находим уровни энергии

$$E_n = -Me^4/2n^2, \quad (k=1)$$

Заметим, что преобразование тильта не является унитарным. Кроме того, возникает дополнительная трудность, связанная с неполнозначностью гамильтониана.

Запишем

$$\hat{H} = \frac{1}{\tau}(\tau\hat{H}) = \frac{M}{\hat{K}_0 - \hat{K}_1} \left[\frac{1}{2}(\hat{K}_0 + \hat{K}_1) - e^2 \right]$$

и представим символ гамильтониана в виде

$$\mathcal{H}(z, \bar{z}) = M \int d\mu_2(z', \bar{z}') \langle \tilde{z}' | (\hat{K}_0 - \hat{K}_1)^{-1} | \tilde{z}' \rangle \cdot \\ \langle \tilde{z}' | \left[\frac{1}{2} (\hat{K}_0 + \hat{K}_1) - e^2 \right] | \tilde{z}' \rangle. \quad (100)$$

Ясно, что выражение (100) может быть не определено для произвольных когерентных состояний.

В работе [97] эти трудности обойдены переходом к функциональному интегралу для резольвенты, полюса которой дадут спектр энергии связанных состояний,

$$G(E) = \text{Sp} (1/\Omega(E)), \quad (101)$$

где $\Omega(E)$ определено формулой (97). Состояния удобно нумеровать $|l+1, n_z\rangle$ (напомним, что $\hat{K}^2 = \vec{L}^2$, поэтому $k=l+1$, где \hat{K}^2 - инвариант группы $SO(2,1)$, а \vec{L}^2 - оператор квадрата углового момента).

Запишем $G(E)$ в виде

$$G(E) = -i \int_0^\infty dT \text{Sp} e^{-i\Omega(E)T} \quad (102)$$

Кроме того

$$G(E) = \sum_{\ell} G_{\ell}(E), \quad \text{где } G_{\ell}(E) \text{ можно вычислить,} \\ \text{взяв след по кс группы } SU(1,1). \\ |z; \ell+1\rangle = (1 - z\bar{z})^{\ell+1} \sum_{n_z=0}^{\infty} \left[\frac{\Gamma(n_z + 2\ell + 2)}{n_z! \Gamma(2\ell + 2)} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times z^{n_z} |\ell+1, n_z\rangle. \quad (103)$$

Определим ковариантный символ оператора $G_{\ell}(E)$

$$G_{\ell}(z, \bar{z}; T) = \langle z, \ell+1 | e^{-i\Omega(E)T} | z, \ell+1 \rangle \quad (104)$$

и представим его в виде интеграла по траекториям на плоскости Лобачевского, роль "гамильтониана" здесь выполняет оператор $\Omega(E)$, ковариантный символ которого равен

$$\Omega(z, \bar{z}) = (-2E/M)^{1/2} (\ell+1) \frac{1+z\bar{z}}{1-z\bar{z}} - e^2 \quad (105)$$

Видим, что "гамильтониан" осцилляторный в искривленном фазовом пространстве. $G_e(E)$ вычисляется точно при помощи простого обходного приема. Оператор $\exp[-i\Omega(E)T]$ является оператором представления группы $SU(1,1)$, поэтому $G_e(E)$, действуя на когерентное состояние, переводит его вновь в когерентное состояние.

Задача 124. Показать, что

$$G_e(z, \bar{z} | T) = e^{-i[(-2E/M)^{1/2}(\ell+1) - e^2]T} \times \\ \times (1 - z\bar{z})^{2\ell+1} \left[1 - z\bar{z} e^{-i(-2E/M)^{1/2}T} \right]^{-2(\ell+1)} \quad (106)$$

и вычислить след по когерентным состояниям

$$G_e(E) = \frac{1}{2} \int_0^T dT \exp\{i[e^2 - (-2E/M)^{1/2}(\ell+1)]T\} \times \\ \times [\sin((-2E/M)^{1/2}T/2)]^{-1} = \\ = i \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T dT \exp\{i[e^2 - (-2E/M)^{1/2}(\ell+1+n)]T\} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} [-(-2E/M)^{1/2}(n+\ell+1) - e^2]^{-1} \quad (107)$$

Откуда непосредственно видно, что полюсы этого выражения дают нерелятивистские уровни энергии $E_n = -Me^4/2n^2$. Вопрос о построении интеграла по траекториям для оператора эволюции атома водорода в рамках изучаемого метода остается открытым.

Недавно, Дуру и Клайнерт [100] с использованием уже упоминавшейся техники замены временной переменной вычислили континуальный интеграл для атома водорода в координатном представлении (сведя его при помощи подходящей замены переменных к континуальному интегралу для четырехмерного осциллятора).

IIж). Перспективы метода

Мы надеемся, что разобранные примеры показали, что интегралы по траекториям в представлении когерентных состояний оказались достаточно эффективным средством исследования квантовых задач, для которых построена групповая модель, т.е. найдена динамическая группа гамильтониана и пространство состояний отождествлено с пространством её неприводимого представления. При этом метод интегралов по

траекториям существенно расширяет границы эффективной применимости динамических симметрий [50] не только к линейным системам, но и к системам с полиномиальными гамильтонианами. Мы ограничились разбором приложений к задачам с простейшими динамическими группами $W(1)$, $SU(2)$ и $SU(1,1)$. Обобщение на более общий случай в принципе не сложно. Для этого необходимо знать о свойствах системы когерентных состояний на динамической группе G и представить модельный гамильтониан в виде функции генераторов этой группы. По-видимому, формализм континуального интегрирования в представлении ко группе G окажется удобным и при исследовании термодинамического предела для подобных модельных задач и описания их критического поведения.

Отметим в заключение ещё одну интересную область применения развитых методов, которая здесь не была затронута. В работах [62] и [101] интегралы по траекториям в представлении когерентных состояний строились также для решеточных систем с гамильтонианами типа ферромагнетика Гайзенберга. (Каждому фиксированному узлу решетки ставится в соответствие набор генераторов полупростой компактной группы G и учитываются парные взаимодействия ближайших соседей). Было установлено, что квазиклассические уравнения переходят в пределе при шаге решетки, стремящемся к нулю (континуальный предел), в нелинейное уравнение для кирального поля, принимающего значения в многообразии Кэлера $G_0 \backslash G$. Получающиеся уравнения допускают нетривиальные решения солитонного типа и интеграл по траекториям дает метод "квантования" таких решений. Тем самым возникает интересная и многообещающая связь изложенного метода с теорией киральных полей, что позволяет применить его к расчетам калибровочных теорий на решетках, а также надеяться на возможность описания в рамках этого метода систем с нетривиальной топологической структурой (например, термодинамических фаз в гелии - 3).

Методы теории групп пронизывают всё здание современной теоретической физики и интерес к их использованию не ослабевает. В этом можно убедиться, перелистав взятые наугад несколько последних номеров журналов "Теоретическая и математическая физика", "Ядерная физика", "ЖЭТФ" и т.п.

При написании учебного пособия ставилась цель: попытаться на достаточно простых (как правило, нерелятивистских) моделях продемонстрировать богатые возможности теоретико-группового подхода, его глубину, мощь и красоту, и научить студентов использовать теорию групп при решении конкретных задач квантовой механики. Насколько это удалось — судить читателю. Естественно, что любая книжка подобного объема не может претендовать на сколь-либо полный охват затрагиваемой темы. Вне поля зрения остались, с одной стороны, традиционные приложения теории групп к ядрам атомов, молекулам, твердым телам и к релятивистским свободным полям (группа Пуанкаре), а с другой стороны — совершенно не рассматривались такие модные в последнее время направления, как суперсимметричные теории, групповые схемы вариантов Теории Великого Объединения и т.п. Возможно, это будет сделано позже.

Автор будет признателен всем тем, кто пришлет ему свои замечания.

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. - М.: Наука, 1974.
2. Давыдов А.С. Квантовая механика. - М.: Наука, 1973.
3. Фейнман Р. Статистическая механика. - М.: Мир, 1975.
4. Ахиезер А.И., Пелетминский С.В. Методы статистической физики. - М.: Наука, 1977.
5. Файн В.М. Фотоны и нелинейные среды. - М.: Советское радио, 1972.
6. Shen Y.R., *Phys. Rev.*, 1967, vol 155, p. 921.
7. Гордиен Б.Ф., Осипов А.И., Шелепин Л.А. Кинетические процессы в газах и молекулярные лазеры. - М.: Наука, 1980.
8. Вопросы квантовой теории необратимых процессов. Сб. статей. - М.: ИИ, 1961.
9. Зубарев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика. - М.: Наука, 1971.
10. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. - М.: Гостехиздат, 1946.
11. Белагин А.А., Зельдович Б.Л., Переломов А.М., Попов В.С. *ЖЭТФ*, 1969, т. 56, с. 264.
12. Зельдович Б.Л., Переломов А.М., Попов В.С.
а) *ЖЭТФ*, 1968, т. 55, с. 589; б) *ЖЭТФ*, 1969, т. 57, с. 196.
13. Переломов А.М. *УФН*, 1977, т. 123, с. 23.
14. Лякс М. Флуктуации и когерентные явления. - М.: Мир, 1974.
15. Stenholm S., *Physics Reports*, 1973, vol 6, p. 1.
16. Narducci L.M., et al., *Lett. Nuovo Cimento*, 1973, vol. 8, p. 57.
17. Narducci L.M., et al., *Phys. Rev.* 1974, vol. 9A, p. 829.
18. Narducci L.M., et al., *Phys. Rev.*, 1974, vol. 9A, p. 999.
19. Narducci L.M. et al. *Phys. Rev.*, 1975, vol. 11A, p. 280.
20. Gilmore R., Bowden Ch. M., Narducci L.M. *Phys. Rev.*, 1975, vol 12A, p. 1019.

21. Narducci L.M. et.al. *Phys. Rev.* 1975, vol 11A, p 973.
22. Березин Ф.А. Математический сборник. 1971, т.86, с.578;
Изв. АН СССР, серия математич., 1972, т.36, № 5, с.1134.
Berezin F.A. *Preprint ITP-74-2E*, Kiev, 1974.
23. Symon B. *Commun. Math. Phys.*, 1980, vol.71, p 247.
24. Arecchi F.T., Courtens E., Gilmore R., Thomas B.
Phys. Rev., 1972, vol 6A, p. 2211.
25. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.:Наука, 1971.
26. Решетняк С.А., Шелепин Л.А. - Труды ФИАН, 1978, т.106, с.90.
27. Петров В.Э., Решетняк С.А., Третьяков Г.Н., Шелепин Л.А. - Труды ФИАН, 1980, т.124, с.75.
28. Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики. - М.:Мир, 1970.
29. Sudarschan E. C. G., Mukunda N., *J. Math. Phys.*, 1979, vol. 20, p.1801.
30. *Selected papers on noise and stochastic processes*,
ed. N. Wax., Dover. Publ. N-Y, 1954.
31. Ареки Ф., Скалли М., Хакен Г., Вайдлях В. Квантовые флуктуации излучения лазера. - М.:Мир, 1974.
32. Глаубер Р. В книге: Когерентные состояния в квантовой теории. - М.:Мир, 1972, с.26.
33. Швингер Ю. Броуновское движение квантового осциллятора. - М.:ИЛ, 1962.
34. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. - М.:Наука, 1966.
35. Кроль Н.В. в книге: Квантовая оптика и квантовая радиофизика. - М.: Мир, 1966.
36. Лисселл У. Излучение и шумы в квантовой электронике. - М.:Мир, 1972.
37. Зельдович Б.Я., Клышко Д.Н. Письма в ЖЭТФ, 1969, т.9, с.1.
38. Переломов А.М., Попов В.С. ТМФ, 1969, т.1, с.360.
39. Грановский Я.И., Димашко Ю.А., Жеданов А.С. Известия ВУЗов, (Физика), 1980, № 2, с.111.

40. Graham R., Haken H., *Zs. für Physik*, 1970, Bd 237, s.31.
41. Haken H., *Rev. Mod. Physics*, 1975, vol 47, p. 67.
42. Казанцев А.П., Сурдутович Г.И. а) ЖЭТФ, 1969, т.56, с.2001, б) ЖЭТФ, 1970, т.58, с.245, в) Квантовая теория лазера - Дополнение в книге [31].
43. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. - М.:Наука, 1979.
44. Варшавович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. - Ленинград, Наука, 1975.
45. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. - М.:Наука, 1972.
46. Горохов А.В., Николаева О.П. - В книге: Применение классической и квантовой теории поля к решению физических задач. Куйбышев, 1983, с.107.
47. Аллен Л., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы. - М.:Мир, 1978.
48. Вантер Ж. - В книге: Квантовая оптика и квантовая радиофизика. - М.:Мир, 1966.
49. Загидуллин М.В., Синицын И.Г., Шелепин Л.А. Труды ФИАН, 1980, т.124, с.97.
Синицын И.Г., Шелепин Л.А. - В книге: Теоретико-групповые методы в физике. - М.:1980, т.1.
50. Малкин И.А., Манько В.И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. - М.:Наука, 1979.
51. Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. - М.:ФМ, 1962.
52. Helgason S. *Lie groups and symmetric Spaces*. - in „ *Battelle Rencontres*“, ed. by C.M. De Witt, J.A. Wheeler. W.A. Benjamin, N.Y. p.1.
53. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. - М.:Наука, 1965.
54. Herman R. *Physical Aspects of Lie Group Theory*. *Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1974*
55. Попов В.Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. - М.:Атомиздат, 1976.

56. Васильев А.Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. Изд. ЛГУ, 1976.
57. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. -М.: Наука, 1978.
58. Kleinert H. - *Forts. der. Phys.*, 1978, Bd.26, p.565.
59. Klauder J.R. - In: *Path Integrals*, Plenum, New York, 1978, p.5;
- *Phys. Rev.*, 1979, vol. 19D, p.2349.
60. Kuratsuji H., Suzuki T. - *J. Math. Phys.*, 1980, vol. 21, p.472;
Kuratsuji H., Mizobuchi Y. *J. Math. Phys.*, 1981, vol. 22,
p.757.
61. Горохов А.В. - В книге: Теоретико-групповые методы в физике. М.: Наука, 1980, т.1, с.249.
62. Горохов А.В. - В книге: Теоретико-групповые методы в физике. М.: Наука, 1983, т.2, с.200.
63. Новиков Л.Ф. ТМФ, 1977, т.30, с.218; ТМФ, 1983, т.54, с.193.
64. Kramer P., Saraceno M., - *Lect. Notes in Physics*, 1981,
vol. 140, p.1.
65. Simms D.J. *Lect. Notes in Mathematics*, 1975, vol. 570, p.167;
- *Lect. Notes in Physics*, 1979, vol. 106, p.220.
66. Marinov M.S., Terent'ev M.V. - *Forts. der. Phys.*, 1979, Bd. 27;
p.511.
67. Менский М.Б. Метод индуцированных представлений. Пространство-время и концепция частиц. - М.:Наука, 1976.
68. Менский М.Б. Группа путей измерения, поля, частицы. -М.:Наука, 1983.
69. Менский М.Б. - В книге: Теоретико-групповые методы в физике. -М.: Наука, 1983, т.2, с.34.
70. Березин Ф.А. УФН, 1980, т.132, в.3, с.497.
71. Perelomov A.M., *Commun. Math. Phys.*, 1975, vol. 44, p. 197;
Monastyrsky M.I., Perelomov A.M. - *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol 23, p.23, 1975.
72. Переломов А.М. ЯФ, 1979, 29, с.1688.

73. Хедгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. - М.: Мир, 1964.
74. Onofri M. - *J. Math. Phys.*, 1975, vol. 16, p. 1087.
75. Желобенко Д.П. Компактные группы Ли и их представления. - М.: Наука, 1970.
76. Bargmann V. - in "Analytic Methods of Mathematical Physics", ed. G. Gilbert and R. Newton, Gordon and Breach, New York, 1970, p. 27.
77. Березин Ф.А. Метод вторичного квантования. - М.: Наука, 1965.
78. Volk W., *Zs. Phys.*, 1932, vol. 75, s. 622.
79. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, ч. I и ч. II. - М.: Наука, 1976.
80. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. - М.: Наука, 1974.
81. Гийемин В., Стернберг С. Геометрические асимптотики. - М.: Мир, 1981.
82. Федорук М.В. Метод перевала. - М.: Наука, 1977.
83. Kobayasi Sh., Nomidzu K. Основы дифференциальной геометрии. - М.: Наука, т. I, 2, 1981.
84. Klauder J.R., *J. Math. Phys.*, 1963, vol. 4, p. 1055;
J. Math. Phys., 1964, vol. 5, p. 177.
85. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. - М.: МГУ, 1965.
86. Keller J.B., *Ann. of Phys. (USA)*, 1958, vol. 4, p. 180.
87. Карасев М.В., Маслов В.П., ТМФ, 1982, т. 53, № 3, с. 374.
88. Когерентные состояния в квантовой теории. - Сб. статей под ред. Манько В.И. - М.: Мир, 1972.

89. Klauder J.R., *Acta Phys. Austriaca, Suppl.*, 1980, XXII, p.3.
90. Липкин Г. Квантовая механика. - М.: Мир, 1977.
Lipkin H.J., Meshkov N., Glick A.J.
Nucl. Phys., 1965, vol 62, p. 188.
91. Gilmore R., Feng D.H., - *Nucl. Phys.* 1978, vol. A301, p.189;
Phys. Letters, 1978, vol. 76 B, p. 26.
92. Яковлева Е.А. Континуальный интеграл на группе $SU(2)$ и сверхтекучие ядерные модели. Дипломная работа. Куйбышев, 1983.
93. Lieb E.H. *Commun. Math. Phys.*, 1973, vol. 31, p 327.
94. Постон Т., Стюарт Я. Теория катастроф и её применения. - М.: Мир, 1980.
Арнольд В.И. Теория катастроф. - М.: Изд-во МГУ, 1983.
95. Kuratsuji H., Suzuki T. - *Phys. Letters*, 1980, vol. 92 B, p.19.
96. Nishiyama S. - *Progress Theor. Physics, Letters*, 1981, vol. 66, p. 348.
Gerry Ch.C. - *J. Math. Phys.*, 1982, vol. 23, p. 1995.
Berezin F.A. - *Commun. Math. Phys.*, 1975, vol. 40, p.153.
99. Gordero P., Hojman J. - *Lett. Nuovo Cimento*, 1970, vol. 4, p.1123.
Chia-Chung Sun and Zong-Hao Zeng. - *J. Math. Phys.*, 1983, vol. 24, p. 1482.
100. Duru I.H., Kleinert H., - *Forts. der Physik*, 1982, Bd.30, p.401.
101. Горохов А.В. - В книге: Применение квантовой и классической теории поля к решению физических задач. Куйбышев, Изд. КГУ, 1983, с.80.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
§ IО. Групповые методы в квантовой теории релаксации.....	4
IОа) Матрица плотности динамической подсистемы и уравнение Фоккера-Планка.....	4
IОб) Релаксация гармонического осциллятора с одноквантовыми переходами	19
IОв) Релаксация осциллятора, взаимодействующего с классической силой.....	24
IОг) Релаксация параметрически возбуждаемого осциллятора.....	28
IОд) Уравнение Фоккера-Планка в теории лазера	31
IОе) Релаксация спиновых систем и модель Дике	35
IОж) Сингулярный осциллятор в термостате и уравнение Фоккера-Планка на плоскости Лобачевского	46
§ II. Группы Ли и интегралы по траекториям	49
IIа) Голоморфное представление когерентных состояний, ковариантные символы и фейнмановский пропагатор	50
IIб) Квазиклассическая асимптотика и многообразия Кэлера.....	57
IIв) Группа Гейзенберга-Вейля и интеграл по траекториям для бозонных систем.....	62
IIг) Интеграл по траекториям в представлении когерентных состояний группы $SU(2)$	64
IIд) Модель Липкина-Менкова.....	71
IIе) Интегралы по траекториям в случае динамической группы $SU(1,1)$	79
IIж) Перспективы метода	87
Заключение	89
Литература	90